O PROBLEMA DO PROFMAT 2017

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2017 consistiu na resolução do problema “Pares com somas diferentes”:

> *Queremos formar um conjunto de dez números naturais, de tal modo que não haja nenhum par de números com a mesma soma de outro par. Ou seja, as somas dos seus elementos, dois a dois, têm de ser todas diferentes. Além disso, o maior número do conjunto tem de ser o menor possível.*

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues 19 resoluções (15 individuais e 4 em grupo).

Dez dos concorrentes apresentaram soluções em que o maior número do conjunto é 53. Os restantes ou se enganaram ou o máximo dos conjuntos propostos era superior.

Os processos de resolução foram bastante parecidos.

Estratégia: *escolher os números iniciais e ir eliminando sucessivamente os números restantes quando a soma se repetir* (Paula Barros).

Além disso, como diz a Adriana Ferreira, *não podem existir dois números iguais no conjunto pois a soma destes com qualquer outro seria a mesma.*

Todos foram construindo o conjunto passo a passo, começando pelos menores inteiros, 1 e 2, e acrescentando o menor número que não desse origem a somas repetidas. Várias pessoas decidiram usar um *“instrumento considerado menos ortodoxo nos tempos atuais, a folha de cálculo (de uma calculadora, de um computador, ou de qualquer dispositivo tecnológico”* (João Carlos Terroso), os outros fizeram tudo com papel e lápis.

A Carlota Lemos explica: *Comecei a somar, dois a dois, os números 1, 2 e 3 (obtendo as somas 3, 4, 5). Experimentei o 4 mas exclui-o por dar origem a somas repetidas. Introduzi o 5, que origina somas distintas (6, 7, 8). E assim sucessivamente.*

Seguindo o processo, os primeiros sete números do conjunto são: 1, 2, 3, 5, 8, 13 e 21. Ora este é o início da sequência de Fibonacci, o que fez com que alguns concorrentes admitissem que estava encontrada a regra de formação e deixassem de testar todos os números. Mas, em Matemática, mesmo que uma lei verifique muitos casos, não se pode garantir que ela é válida se não a demonstrarmos. Infelizmente, e com surpresa de muita gente, neste problema a sequência de Fibonacci falha a partir do oitavo elemento.

Quem não se deixou enganar e continuou a experimentar todos os números, obteve o conjunto {1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 30, 39, 53}.

NOTA FINAL

Durante a semana do ProfMat, este problema foi também proposto na secção “Desafios” do jornal Público. Após publicação da solução (em que o maior número era também 53), o leitor Delfim Guedes (Gaia) indicou soluções melhores em que não se começa pelos números 1 e 2. Por exemplo, {1, 4, 7, 9, 11, 18, 27, 39, 51, 52} ou {1, 3, 5, 6, 9, 15, 22, 29, 40, 51}.

PREMIADOS E PRÉMIOS

1º - Letícia Martins

(Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments)

2º - Adriana Ferreira

(Livro “Problemas… Sem Problema”, J. P. Viana, ed. APM)

3º - Paula Barros

(Livro “Problemas… Sem Problema”, J. P. Viana, ed. APM)

4º - Carlota Lemos

(Livro “Problemas… Sem Problema”, J. P. Viana, ed. APM)

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2017. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt ou 217163690).

Outros concorrentes – Alice Martins, Armando Ferreira, Catarina Ferreira, Célia Matos, Conceição Ferreira, Fausto Barros Silva, Fernanda Matias, Fernanda Rua, João Carlos Terroso, Lucília Silva, Raul Aparício, e os grupos: Bruno Francisco & Isabel Beatriz; Grupo Camões (Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos, Teresa Moreira, Tiago Teo & João Jaime Pires); Rita Ribeiro & Miguel Pereira; Sandra, Sofia & Daniel Castanho.

José Paulo Viana