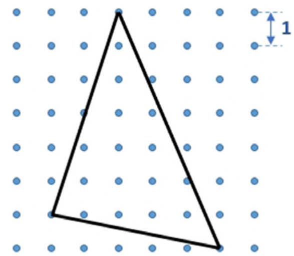
NO GEOPLANO



O Mário afirmou:

– Se tiver um geoplano de malha quadriculada suficientemente grande, consigo construir um triângulo retângulo em que nenhum dos lados é horizontal ou vertical e com as suas medidas a serem números inteiros!

Será que o Mário tem razão?

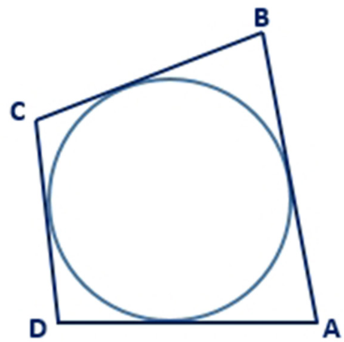
Se sim, em área, qual é o menor desses triângulos?

(Respostas até 15 de setembro, para zepaulo46@gmail.com)

UM QUADRILÁTERO CIRCUNSCRITO

O problema proposto no número 139/140 de *Educação e Matemática* foi este:

O quadrilátero ABCD circunscreve uma circunferência (a figura é apenas ilustrativa).



O lado AB mede 46 centímetros, o lado BC 40cm e o lado CD 32cm.

1ª Pergunta: Quanto mede o lado DA?

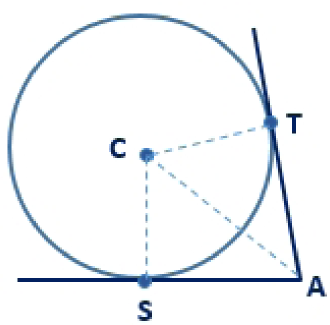
2ª Pergunta (para os entusiastas da tecnologia): De todos os quadriláteros nestas circunstâncias, qual é a área do maior? Qual é, neste caso, o raio da circunferência que ele circunscreve?

Recebemos sete respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

1ª Pergunta

Propriedade: Se, por um ponto exterior A, traçarmos as duas tangentes a uma dada circunferência, são iguais as distâncias de A aos dois pontos de tangência, ou seja, $\overline{AT}=\overline{AS}$.

Quase todos os nossos leitores partiram desta propriedade (e alguns demonstraram-na mesmo, usando a simetria da circunferência e a igualdade dos triângulos ACS e ACT).



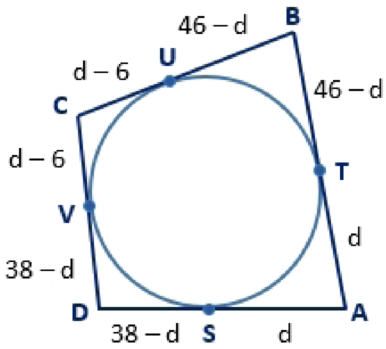
Depois, chamando **d** à medida dos segmentos AS e AT, é possível ir escrevendo as medidas dos sucessivos segmentos em função de **d**.

$\overline{BT}=46-d$

$\overline{BU}=40-(46-d)=d-6$

$\overline{DV}=32-(d-6)=38-d$

Logo $\overline{DA}=(38-d)+d=38$



Nota – Uma propriedade, que resulta imediatamente do que foi feito aqui, é a seguinte: Num quadrilátero circunscrito a uma circunferência, são iguais as somas dos comprimentos dos lados opostos. Foi aplicando esta propriedade que Pedrosa Santos chegou imediatamente à solução.

2ª Pergunta

Há uma infinidade de quadriláteros com lados a medirem 46, 40, 32 e 38 cm, todos eles circunscrevendo uma circunferência. *Os quadriláteros não ficam definidos pelas medidas dos quatro lados, sendo necessário saber o valor de um ângulo ou de uma das diagonais* (Alberto).

Quase todos os leitores usaram um programa de geometria dinâmica para responder a esta pergunta.

O método seguido foi construir o quadrilátero com as medidas indicadas, traçar uma diagonal e medi-la. Depois, alterando a forma do polígono, fazer uma recolha dos valores da área em função da diagonal, pedir o gráfico da relação área/diagonal e obter o valor (aproximado) da área máxima.

No entanto, a Graça e o Mário foram mais longe. Como a diagonal escolhida divide o quadrilátero em dois triângulos, pode calcular-se a área desses triângulos, em função da medida da diagonal, aplicando a fórmula de Heron. Com efeito, conhecidos os seus lados a, b e c de um triângulo e sendo s o semiperímetro, a sua área é dada por

$$A_{\Delta}=\sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Consideremos a diagonal AC e representemos por x a medida do seu comprimento. Aplicando a fórmula de Heron, as áreas dos triângulos ABC e ACD são, depois de simplificadas:

$$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{(7396-x^2)(x^2-36)}$$

$$A_{\Delta ACD}=\frac{1}{4}\sqrt{(4900-x^2)(x^2-36)}$$

A área do quadrilátero, em função de x, será:

$$A_{\Delta BCD}=\frac{1}{4}\sqrt{(7396-x^2)(x^2-36)}+\frac{1}{4}\sqrt{(4900-x^2)(x^2-36)}$$

Introduzindo esta função na máquina gráfica e pedindo o seu máximo, temos:

Área máxima ≈ 1495,80747 cm2.

O raio da circunferência circunscrita é ≈ 19,177 cm.

Contudo, o Alberto foi ainda mais longe e nem precisou da tecnologia. Calculou analiticamente a derivada de A(x), igualou-a a zero, resolveu a equação, verificou que correspondia a um máximo e obteve assim o valor exato da medida da diagonal e a correspondente área máxima.

Curiosamente, Pedrosa Santos também prescindiu da tecnologia, utilizando simplesmente papel, lápis, régua, compasso e as fórmulas trigonométricas de resolução de triângulos para obter um valor aproximado da solução. E a verdade é que, desta forma, obteve um resultado com um erro inferior a 0,2%.

O Carlos, depois de resolver o problema, acrescenta:

> *Sem o saber demonstrar estou convencido que a maior área se obtém quando as bissetrizes dos ângulos formado pelas retas que contêm lados opostos são perpendiculares.*

Finalmente, tanto a Graça como o Carlos chamaram a atenção para um mesmo pormenor:

> *Curiosamente, mesmo que o quadrilátero seja côncavo, desde que seja respeitada a regra AB+CD=BC+DA continua a ser possível, não propriamente inscrever uma circunferência, mas pelo menos desenhar uma de modo tal que esta seja tangente às quatro retas que contêm os lados do quadrilátero.*