A matemática dos números felizes e educados

José Luiz Pastore Mello

Estudar teoria dos números na matemática escolar pode ser muito divertido e desafiador quando os temas e problemas são bem escolhidos. Mas o que escolher em um universo tão vasto? Neste artigo apresento definições e algumas propriedades dos números felizes e educados, o que constitui uma interessante porta de entrada para a teoria dos números na sala de aula.

Para não carregar o texto com repetições de palavras, sempre que nele aparecer a palavra "número" me refiro a "número inteiro positivo".

NÚMEROS FELIZES

Escolha um número qualquer como, por exemplo, 4599. Agora começa nosso divertimento: some os quadrados dos seus algarismos e, em seguida, some novamente os quadrados dos algarismos do número obtido. Siga esse mesmo processo até a brincadeira "perder a graça".

$4^2+5^2+9^2+9^2 = \mathbf{203}$, $2^2+0^2+3^2=\mathbf{13}$, $1^2+3^2=\mathbf{10}$, $1^2+0^2=1$, $1^2=1$, … .

O jogo perdeu a graça quando a soma chegou em 1 já que, daí em diante, nada irá mudar, certo? Verdade! Mas dê uma chance ao jogo e tente com outro número. Que tal 731?

$7^2+3^2+1^2=\mathbf{59}$, $5^2+9^2=\mathbf{106}$, $1^2+0^2+6^2=37$, $3^2+7^2=\mathbf{58}$, $5^2+8^2=\mathbf{89}$, $8^2+9^2=\mathbf{145}$, $1^2+4^2+5^2=\mathbf{42}$, $4^2+2^2=\mathbf{20}$, $2^2+0^2=\mathbf{4}$, $4^2=\mathbf{16}$, $1^2+6^2=37$, … .

Foi mais divertido, mas quando chegou em 37 pela segunda vez perdeu a graça porque tudo começa a se repetir ciclicamente: 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89, … .

Quem gosta de brincar com números quer fazer novos testes. O que será que acontece com outros números? Pois, então, experimente antes de prosseguir a leitura.

Curiosamente parece que o processo sempre termina na monótona sequência de uns, ou no intrigante *loop* **4**, **16**, **37**, **58**, **89**, **145**, **42**, **20**. Aos olhos da matemática, se você decidir parar o jogo com o punhado de exemplos analisados terá, no máximo, uma conjectura. Antes de investigar melhor essa conjectura, é hora de dar "nomes aos bois", isso costuma melhorar a comunicação. Batizaremos de **felizes** os números que terminam o processo descrito em infinitos números uns, e de **infelizes** aqueles em que isso não acontece. Passada a limpo, nossa conjectura diz que:

Todos os números (lembre-se, só estamos falando de inteiros positivos) ou são felizes ou são infelizes e presos no *loop* **4**, **16**, **37**, **58**, **89**, **145**, **42**, **20**.

Deixe por enquanto essa conjectura em compasso de espera para, antes, investigar a seguinte pergunta: - Quantos números felizes, e quantos números infelizes existem?

Se 4599 é um número feliz, também serão felizes os números 45990, 459900, 4599000, … . O mesmo raciocínio se aplica ao número infeliz 731 e seus infinitos "seguidores infelizes" 7310, 73100, 731000, … . Se você achou sem graça essa estratégia para concluir que existem infinitos números felizes e infelizes, talvez ache divertida a de pensar nas permutações de algarismos de um número, o que implica dizer que também são felizes os números 4959, 4995, 5499, 5949, 5994, 9954, 9594, 9549, 9945, 9495, 9459, e também são infelizes 713, 371, 317, 173 e 137. Colocando "zeros a direita" de cada um dos números obtidos com as permutações teremos outros infinitos números felizes (e infelizes), e diferentes dos infinitos que já tínhamos.

Mesmo podendo listar infinitos números felizes e infelizes, nossa conjectura continua aberta já que ainda não sabemos se existem números infelizes fora do loop 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. Nosso próximo passo será o de encontrar argumentos matemáticos que possam transformar essa conjectura em um teorema, ou que possam refutá-la por meio, quem sabe, de um contraexemplo. Mãos a obra!

Se **n** é um número de **m** algarismos, a soma dos quadrados dos **m** algarismos de **n** necessariamente será um número menor que ou igual a 9^2m, isso porque o maior quadrado possível de cada algarismo será 9^2. Organizando essa ideia em uma tabela, temos:

m	n	Soma dos quadrados dos **m** algarismos de **n** é menor que ou igual a
1	$1 \le n \le 9$	81
2	$10 \le n \le 99$	162
3	$100 \le n \le 999$	243
4	$1000 \le n \le 9999$	324
5	$10000 \le n \le 99999$	405
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$10^{m-1} \le n \le 10^{m}$	81m

Ocorre que, para $m \geq 4$ sempre teremos $10^{m-1} > 81m$ (verifique![1]), o que implica dizer que para qualquer $n \geq 1000$ ($m \geq 4$), submetido ao "teste de felicidade" com as sucessivas somas dos quadrados dos algarismos, as somas obtidas ao longo do processo

ou constituem uma sequência estritamente decrescente até que se chegue a primeira soma menor do que 1000;

ou constituem uma sequência cujo primeiro termo (primeira soma dos quadrados dos algarismos do número) já é um número menor do que 1000.

(a rigor, há também o caso em que n=1000, e n é trivialmente feliz)

Em última análise, se $n > 1000$, então, em algum momento da sequência de somas dos quadrados dos algarismos chegaremos a um número menor do que 1000. Imagine um número de 15 algarismos. Esse número terá, no máximo, o número 1215 (81x15) como primeira soma dos quadrados dos algarismos. Essa soma representa agora um novo n de, no máximo, 4 algarismos. Se n possui 4 algarismos (m=4), a soma seguinte dos quadrados dos algarismos será, no máximo, igual ao número 324 (81x4), o que reduz o novo n para um número de, no máximo, 3 algarismos, ou seja, um número menor do que 1000. Dessa forma concluímos que a investigação da "felicidade" dos números de 1 até 1000 é um retrato fiel do que acontece com os demais números, maiores do que mil[2].

Já raciocinamos bastante! Chegou a hora de pedir ajuda para quem pensa bem menos do que a gente, mas que faz contas com velocidade incomparavelmente superior: o computador. A investigação da felicidade dos números de 1 até 1000 com a ajuda do computador revela, em fração de segundos, que os números ou são felizes ou infelizes e aprisionados no *loop* 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20. Pronto, agora temos (nós e o computador) um teorema!

O uso de computadores em auxílio à demonstração de teoremas já foi visto com muito preconceito no passado. Essa questão veio a tona com vigor em 1976 quando os matemáticos Appel e Haken, utilizando cerca de 1000 horas de processamento de um computador IBM 360, provaram que quatro cores são suficientes para colorir qualquer mapa plano, dividido em regiões, de forma que "regiões vizinhas" não partilhem a mesma cor. Aquilo que era conhecido como "conjectura das quatro cores", ganhou o *status* de "teorema das quatro cores". Eu não vejo o uso do computador como um "roubo" no processo de demonstração, porque o brilho da demonstração não está no trabalho mecânico da máquina, mas no pensamento dos matemáticos que reduziu um número infinito de possibilidades a um número finito que pudesse ser verificados um a um, ainda que com a ajuda da máquina. Hoje é consenso entre os matemáticos que o computador pode ter papel relevante na demonstração de alguns teoremas complexos, e é interessante que essa perspectiva também seja colocada em pauta com estudantes da matemática escolar.

NÚMEROS EDUCADOS

Vamos seguir um pouco mais na brincadeira de adjetivar números, agora com novas definições.

Chamaremos de números educados os que podem ser escritos como soma de dois ou mais números consecutivos. Por exemplo, 29 é um **educado** porque 29 = 14+15. Aqueles que não podem ser assim escritos, como por exemplo o 8, serão chamados de **mal-educados.**

Excetuando-se o caso trivial da troca na ordem dos termos da adição, existem números educados que podem ser escritos como mais de uma adição de consecutivos, como é o caso do 18 que é igual a 3+4+5+6, e também igual a 5+6+7. Chamaremos de "**grau de educação**" de um número educado o total de adições diferentes de consecutivos (exceto pela ordem). Nos exemplos dados, 29 e 18 têm grau de educação 1 e 2, respectivamente.

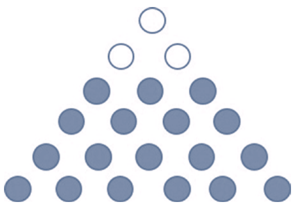
Alguns fatos curiosos podem ser levantados sobre números educados e seu grau de educação. O primeiro é a relação que existe entre números educados e números triangulares. Recordando: um número triangular T_t é tal que

$T_1=1$ $T_2=3$ $T_3=6$ $T_4=10$ $T_4=15$ $T_6=21$

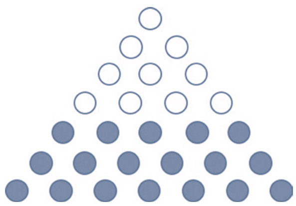
1Não é difícil convencer-se desse resultado observando, em uma tabela, que para m igual a 4, 5, 6, ... os "saltos" em 10^{m-1} são, respectivamente, iguais a 9000, 90000, 900000, ... , ao passo que os "saltos" em 81m são constantemente iguais a 81. Caso o leitor queira uma demonstração mais rigorosa, recomendamos que a faça por indução.

2 Se quisermos ser mais econômicos ainda, a verificação de 1 até 243 já é suficiente como um retrato de tudo o que acontece com os demais números inteiros (pense nisso!).

Um número educado maior do que um sempre será a "diferença entre pares de números triangulares", sendo que essa diferença tem que resultar na soma de pelo menos duas linhas consecutivas do "triângulo". É comum chamar os números educados diferentes de 1 de números trapezoidais devido a forma de trapézio que aparece com a subtração de dois números triangulares. Por exemplo, o educado 18 é trapezoidal, com duas adições de consecutivos que são

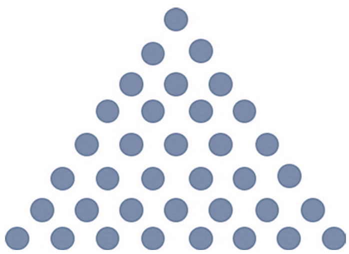


$18=T_6-T_2=3+4+5+6$

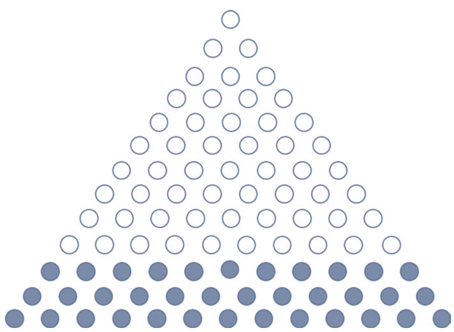


$18=T_7-T_4=5+6+7$

Vale observar que alguns números educados também podem ser escritos, além da diferença entre pares de triangulares, diretamente como número triangular, como é o caso do 36:



$36=T_8=1+2+3+...+8$



$36=T_{13}-T_{10}=11+12+13$

Em síntese, um número educado diferente de 1 sempre será trapezoidal e, eventualmente, também será triangular. Seja olhando para a "forma geométrica" de um número educado, ou simplesmente para a adição aritmética de consecutivos, temos nas mãos uma primeira ideia de algoritmo para achar todas as adições de consecutivos que resultam em um número educado n. Vamos a ele:

Arme um número triangular T_n e procure, da base do triângulo para cima, somas de duas ou mais linhas que resultem em n. Em seguida, repita o mesmo processo com T_{n-1}, T_{n-2}, ... T_1.

Investigaremos agora o curioso fato de que uma potência de 2 (diferente de 1) jamais será um número educado. Seja n um número educado em que a soma dos m números consecutivos, com m>1, comece por k+1. Então, temos

$n = (k+1)+(k+2)+(k+3)+ \ldots +(K+m)$, ou ainda, $n = T_{k+m} - T_k$.

Relembrando que um número triangular $T_t = 1+2+3+ \ldots + t$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética, segue que $T_t = \frac{(1+t).t}{2}$. Temos agora

$n = (k+1)+(k+2)+(k+3)+ \ldots +(k+m)$,

$$n = \frac{(k+1+k+m).m}{2}$$

$$n = \frac{m.(2k+m+1)}{2}$$

Observe a última igualdade. Se m for par, então (2k+m+1) será ímpar, e se m for ímpar, então (2k+m+1) será par. Segue então que números educados sempre podem ser escritos como um produto de um número par $\frac{m}{2}$ por um número ímpar (2k+m+1), ou de um número ímpar m por um número par $\frac{2k+m+1}{2}$, o que tira qualquer chance de uma potência de 2 ser um número educado já que, sem usar o 1, as potências de 2 só podem ser escritas como multiplicação de fatores pares.

Por fim, agora vamos demonstrar que todos os números, excetuando-se as potências de 2 (diferentes de 1), são educados. Seja n um número que possa ser escrito como multiplicação de dois números, sendo um deles ímpar e diferente de 1 (note que essa é uma maneira de dizer que n é um inteiro positivo qualquer, sem ser uma potência de 2 diferente de 1). Nesse caso, mostraremos que n sempre será um número educado.

Como n pode ser escrito com um fator ímpar diferente de 1, então, 2n pode ser escrito como $f_1.f_2$ (com $1<f_1<f_2$), com um dos dois fatores (ou f_1 ou f_2) sendo ímpar, e o outro par. Para $f_1=m$ e $f_2=2k+m+1$, que é uma representação de um ímpar e um par, segue que,

$2n=m.(2k+m+1)$

$$n = \frac{m.(2k+m+1)}{2}$$

Acabamos de mostrar que todo número que não é potência de 2 (diferente de 1) pode ser escrito na forma $\frac{m.(2k+m+1)}{2}$ e, como já vimos anteriormente, inteiros positivos escritos dessa forma são sempre números educados.

O percurso da demonstração ainda nos forneceu de bônus o caminho de um algoritmo bem mais esperto do que aquele que já tínhamos para representar um número educado como adição de consecutivos. Vamos a ele.

Seja n um inteiro positivo com um fator ímpar maior do que 1. Se $2n=f_1.f_2$, com $f_1=m$, $f_2=2k+m+1$ e $1<f_1<f_2$, temos: $m=f_1$ e $k=\frac{f_2 - f_1 - 1}{2}$, com $n=(k+1)+(k+2)+(k+3)+ \dots +(k+m)$ sendo um número educado.

Vamos aplicar a ideia do parágrafo acima para a obtenção das adições de consecutivos do número educado n=60. Para isso, comecemos encontrando todas as multiplicações de dois fatores em que um deles seja ímpar (e maior do que 1), e cujo produto seja 2n=120. Essa busca pode ser feita analisando os fatores primos do 120. Daí em diante o processo é bem simples.

$2n=3.40$
$f_1=3$ e $f_2=40$
$m=3$ e $k=18$
$60=19+20+21$

$2n=5.24$
$f_1=5$ e $f_2=24$
$m=5$ e $k=9$
$60=10+11+12+13+14$

$2n=15.8$
$f_1=8$ e $f_2=15$
$m=8$ e $k=3$
$60=4+5+6+7+8+9+10+11$

Note que o grau de educação de 60 é 3 já que foi possível escrevê-lo de três formas diferentes como adição de consecutivos. É fácil concluir, agora, que o grau de educação será sempre igual ao total de divisores ímpares maiores do que 1 do número educado.

Finalizo este artigo deixando quatro interessantes perguntas (e respostas) que podem ajudar a compor temas de investigação para uma boa aula de matemática com os números felizes e educados.

Perguntas

1. Estamos no ano 2016, que é um número "infeliz e educado" (verifique isso). Qual será o próximo ano "feliz e educado"?
2. Qual será o primeiro ano da Era Comum que é "feliz e mal-educado"?
3. Qual é o 50.º número educado?
4. Essa é difícil! Complete o próximo termo da sequência 313, 331, 367, ____. (se você conhece a série de ficção científica Doctor Who, aí vai uma dica para resolver este problema: - Assista o episódio 42!)

Respostas

De fato, 2016 é infeliz já que $2^2+0^2+1^2+6^2 = 41$, $4^2+1^2 = 17$, $1^2+7^2 = 50$, $5^2+0^2 = 25$, $2^2+5^2 = 29$, $2^2+9^2 = 85$, $8^2+5^2 = 89$, $8^2+9^2= \mathbf{145}$, $1^2+4^2+5^2 = \mathbf{42}$, $4^2+2^2 = \mathbf{20}$, $2^2+0^2 = 4$, $4^2 = \mathbf{16}$, $1^2+6^2 = \mathbf{37}$, $3^2+7^2 = \mathbf{58}$, $5^2+8^2 = 89$ (entrou em loop). E 2016 é educado porque não é uma potência de 2. O grau de educação de 2016 é 5 porque 2016 tem cinco divisores ímpares diferentes de 1, que são 3, 7, 9, 21 e 63. Usando o último algoritmo descrito no artigo, segue que: 2016 = 671 +672+673=220+221+...+228=285+286+...+291=86+87+...+ 106 = = 1+2+...+63.

O próximo ano "feliz e educado" será 2019. Veja:

$2^2+0^2+1^2+9^2 = 86$, $8^2+6^2 = 100$, $1^2+0^2+0^2 = 1$, e

2019 = 672+674+674 = 334+335+336+337+338+339 (grau de educação 2).

4096, que é mal-educado ($4096 = 2^{12}$) e feliz já que $4^2+0^2+9^2+6^2 = 133$, $1^2+3^2+3^2 = 19$, $1^2+9^2 = 82$, $8^2+2^2 = 68$, $6^2+8^2 = 100$, $1^2+0^2+0^2 = 1$.

Como todos os números, exceto as potências de 2, são educados, pegue os números de 1 até 50, elimine os números 1, 2, 4, 8, 16, 32, e acrescente os números 51, 52, 53, 54, 55 e 56. O número procurado é o 56. O número também pode ser encontrado consultando a "enciclopédia on-line de sequência de inteiros", indicada na bibliografia, ou ainda aplicando o seguinte teorema: o n-ésimo número educado pode ser escrito como f(n+1), sendo $f(n)=n+\{\log_2[(n+\log_2 n)]\}$, com $\{x\}$ representando o maior número inteiro menor que ou igual ao real x. Fazendo as contas, segue que o 50.º número educado será f(51)=56.

No episódio 42 (ano 2007) da série da TV britânica Doctor Who, a sequência 313, 331, 367, ___ precisa ser completada para o desbloqueio da porta de uma nave espacial que está prestes a colidir com uma estrela. The Doctor (interpretado nessa temporada pelo ator David Tennant) diz que a sequência deve ser completada com 379, que é o próximo **número primo feliz**, e ainda ironiza aqueles que desconfiam da sua lógica dizendo: "- Será que não se ensina mais matemática recreativa nas escolas?".

Referência bibliográfica

Números felizes (Happy numbers): https://en.wikipedia.org/wiki/Happy_number.

Números educados (Polite numbers): https://en.wikipedia.org/wiki/Polite_number.

On-Line Encyclopedia of Integer Sequences: https://oeis.org/.

Gamer, C., Roeder, D. W., Watkins, J. J. (1985). Trapezoidal numbers, 58(2), 108-110.

Lancaster, R. (2016). Lessons on politeness. Mathematics Teacher, 109(5), 330-333.

José Luiz Pastore Mello

Colégio Santa Cruz, São Paulo/Brasil