O problema do trimestre

Sobre as respostas ao problema anterior

Relembremos o enunciado do problema proposto no nº 15 de *Educação e Matemática*:

"Quatro moínhos estão dispostos nos vértices de um quadrado de lado igual a um quilómetro.

Queremos construir uma rede de estradas de modo que se possa ir de qualquer um dos moínhos para outro, e queremos gastar o mínimo de dinheiro. Portanto a rede terá de ser a menor possível (quilometragem mínima).

Quantos metros de estrada teremos de construir?"

Recebemos cinco respostas. Uma, conjunta, de Albano Silva e António Bernardes, e as outras de Alberto Canelas, J. Sacadura Cabral, Cristina Viegas Henriques e Roberto Oliveira. Todas elas seguem caminhos essencialmente parecidos, embora a primeira tenha uma fase de pesquisa com calculadora e folha de cálculo e a segunda tenha mais considerações teóricas.

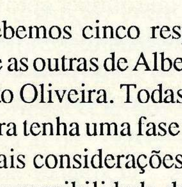
Na impossibilidade de transcrevermos todas as respostas, aqui fica o essencial.

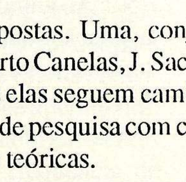
Se os caminhos seguirem directamente de um moínho para outro mais próximo (fig. 1), o comprimento total é 3000m.

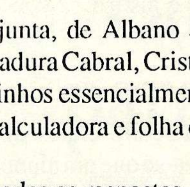
Se os caminhos seguirem as diagonais do quadrado (fig. 2), a distância total é $2 \times 1000 \times \sqrt{2} = 2828{,}43$m.

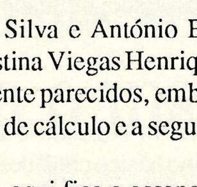
É fácil verificar que, se os quatro caminhos que saem dos moínhos se encontram num único ponto (fig. 3), a distância é mínima quando esse ponto é o centro do quadrado. Com efeito, para se ir de um moínho para o que está no vértice oposto, o percurso é mínimo quando se segue pela diagonal.

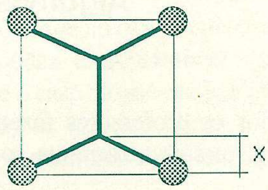
Finalmente, vejamos o que acontece se os caminhos se encontrarem em dois pontos diferentes, com um troço comum, conforme se indica na figura 4. Não se esqueça que, devido à simetria do quadrado, o troço comum vai passar no centro.


1


2


3


4



5

Seja x a distância indicada na figura 5. Por simples aplicação do teorema de Pitágoras, a distância total da rede de estradas será dada por

$$d(x) = 4\sqrt{x^2 + 1/4} - 2x + 1 .$$

Agora podemos, utilizando a folha de cálculo, descobrir o valor aproximado do mínimo desta função, ou, para se obter o seu valor exacto, aplicar os conhecimentos de derivadas. Fazendo a primeira derivada e igualando a zero, obtemos

$$x = \sqrt{3}/6$$

que, pelo sinal da segunda derivada neste ponto, confirmaríamos ser um mínimo.

Para sabermos o comprimento total da rede de caminhos basta substituirmos na função d o valor que obtivemos para x. Efectuados os cálculos, encontramos então:

$$d = 2732{,}05 \text{ metros.}$$

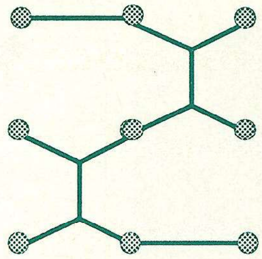
A solução apresenta uma regularidade curiosa. Os três caminhos que se encontram num ponto fazem ângulos de 120 graus entre si e cada caminho que sai de um moínho faz um ângulo de 30 graus com o lado do quadrado.

Finalmente, J. Sacadura Cabral propõe duas extensões do problema, a primeira para 9 moínhos e a segunda para 16, estando em qualquer dos casos os moínhos dispostos nos vértices de uma malha quadrangular.

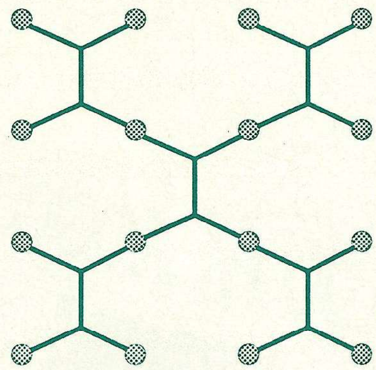
As soluções serão as indicadas nas figuras,obtendo-se os seguintes valores:

$d_9 = 7464{,}10$ m
$d_{16} = 13660{,}25$ m.

José Paulo Viana



6

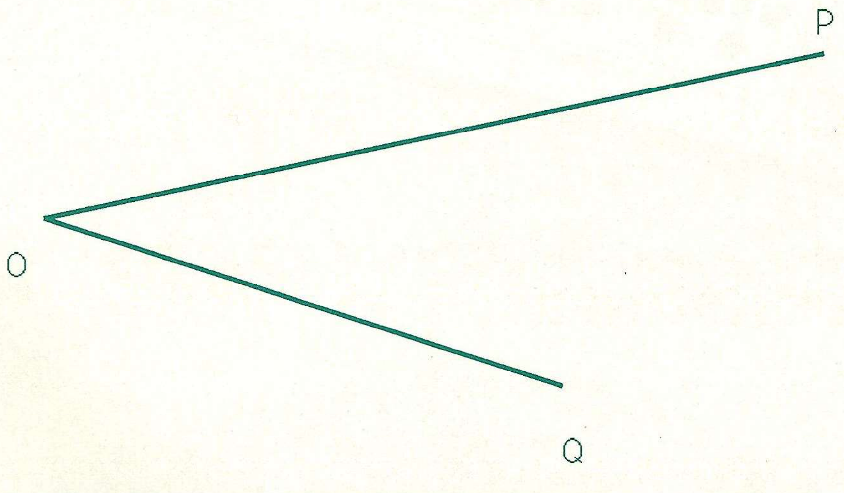


7

Problema Proposto

São dados dois segmentos de recta, OP e OQ, com a mesma origem, conforme se vê na figura.

Quais são os pontos do plano equidistantes destes segmentos?



31