

Pontos e Circunferências

Temos quatro pontos do plano, não colineares três a três e não pertencentes a uma mesma circunferência.

No máximo, quantas circunferências equidistantes dos pontos podem existir? E no mínimo?



(Respostas até 30 de junho, para zepaulo46@gmail.com)

QUADRADO MULTIPLICATIVO

O problema proposto no número 138 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Num quadrado de 3×3 , colocar nove números naturais diferentes de modo que:

– os três produtos horizontais e os três produtos verticais sejam todos iguais,

– o maior dos números seja o menor possível.

Recebemos 10 respostas: Alice Martins (Torres Novas), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Edgar Martins (Queluz), Guilherme Salvador (Torres Novas), Maria Carolina (Braga), Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), de um grupo de professores da Escola Básica Carlos Gargaté (Charneca da Caparica), e dos alunos David, Francisca e Guilherme (Colégio D. Diogo de Sousa – Braga)

Os métodos utilizados foram muito diversos e vale a pena partilhá-los. Como se verá, o maior valor do quadrado é 15.

Edgar Martins

Existem 6 maneiras de acrescentar um número de forma a manter o produto vertical e horizontal igual.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | B | | C | |
| | A | | | B | | C | | |
| | | A | B | | | | | C |
| D | | | | | E | | F | |
| | | D | E | | | | | F |
| | D | | | E | | F | | |

Fazendo o produto, quadrado a quadrado:

| | | |
|----|----|----|
| AD | CF | BE |
| CE | AB | DF |
| BF | DE | AC |

Substituímos as letras por 1, 1, 2, 3, 4 e 5 de forma a não haver números repetidos no quadrado.

| A=1 e B=1 | C=2 e D=3 | E=4 e F=5 | | | | | | |
|-----------|-----------|-----------|----|----|----|---|----|----|
| D | CF | E | 3 | 2F | E | 3 | 10 | 4 |
| CE | 1 | DF | 2E | 1 | 3F | 8 | 1 | 15 |
| F | DE | C | F | 3E | 2 | 5 | 12 | 2 |

Carlos Dias

O método utilizado foi procurar combinações de números primos (mais a unidade, já que esta não é considerada primo) o mais baixo possível que pudessem ser agrupados de 6 maneiras diferentes.

Cada uma das linhas (e das colunas) é composta por diferentes combinações destes fatores primos.

Temos portanto que conseguir agrupar os números de 6 formas diferentes (3 linhas mais 3 colunas)

Com produtos inferiores a 120 não é possível arranjar os 9 valores todos diferentes. Experimentei com $60=1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$, com $90=1 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ e com $56=1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 7$.

Assim, o número $120 = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$ é o menor valor que nos serve.

O quadrado expresso nos seus fatores primos fica pois:

| | | |
|-----------------------|-----------------------|--------------|
| $2 \times 2 \times 3$ | 1 | 2×5 |
| 2 | 3×5 | 2×2 |
| 5 | $2 \times 2 \times 2$ | 3 |

Maria Carolina

1. Coloca-se em cada célula do quadrado uma letra diferente.

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

2. Substitui-se A, E e I por 3, 2 e 1 (os três menores números naturais), na diagonal para todas as linhas ou colunas ficarem apenas com duas incógnitas.

3. Obtém-se as igualdades

$$ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3BC = 2DF = GH = 3DG = 2BH = CF$$

Donde, por substituições, se obtém:

$$GH = 2BH \Leftrightarrow G = 2B,$$

$$GH = 3DG \Leftrightarrow H = 3D$$

$$CF = 2DF \Leftrightarrow C = 2D$$

Assim, $GH = 6BD$

Substituindo o B e D pelos menores números naturais seguintes, 4 e 5, obtinha-se

$$6BD = 6 \times 4 \times 5 = 120, \text{ ou seja, } 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Efetuando as últimas substituições no quadrado, obtemos a resposta:

| | | |
|---|----|----|
| 3 | 4 | 10 |
| 5 | 2 | 12 |
| 8 | 15 | 1 |

Professores da EB Carlos Gargaté e Mário Roque

Foram mais longe, impondo a condição de as diagonais terem também o mesmo produto. Construíram o que julgam ser o quadro mágico multiplicativo com o menor número possível. A constante mágica nas linhas, nas colunas e nas diagonais é 216.

| | | | | | |
|---|----|----|----|---|---|
| | ↘ | ↓ | ↓ | ↓ | ↙ |
| → | 2 | 36 | 3 | | |
| → | 9 | 6 | 4 | | |
| → | 12 | 1 | 18 | | |

E, como diz o Mário:

Mas enfim, se não foi mágico... foi pelo menos muito divertido!



O oitavo **Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**, da responsabilidade da Federação Iberoamericana de Educação Matemática (FISEM) à qual a APM pertence desde a sua fundação, realiza-se em Madrid de 10 a 14 de julho de 2017 e é organizado pela Federação Espanhola de Sociedades de Professores de Matemáticas (FESPM).

As informações podem ser encontradas na página do encontro em <http://www.cibem.org/index.php/es/>