Perguntas (mais ou menos) frequentes sobre primitivas

Patrícia Damas Beites
Sandra Bento
Maria Luísa Branco

A avaliação está na ordem do dia nos vários domínios da vida social, correspondendo a um processo que procura dotar os cidadãos de informações que tornem mais transparentes as opções tomadas com os dinheiros públicos, em matérias de interesse geral. Como salientado por Fernandes (2011), a avaliação de programas públicos corresponde a uma prática consolidada em muitos países, nos quais se incluem a maioria dos países europeus. Em Portugal, esta é igualmente uma preocupação e uma área que tem vindo a ganhar expressão. No domínio da educação, em particular, tem-se assistido à preocupação com a avaliação dos programas educacionais. O propósito desta avaliação consiste basicamente em perceber se um programa está a corresponder aos objetivos com que foi implementado, passando pela verificação da sua eficácia, a identificação de problemas no seu desenvolvimento e nos resultados obtidos, assim como a necessidade de alterações ou conceção de novos programas (Fernandes, 2011). A avaliação de um programa pressupõe o esclarecimento cabal do quadro de valores e orientações utilizado na determinação do valor do mesmo (Fernandes, 2013).

Considerando a importância atualmente concedida à avaliação de programas educacionais, não deixa de causar estranheza a ausência de experimentação nas escolas do novo Programa de Matemática do Ensino Secundário (PMES), contrariamente ao que aconteceu com a implementação do programa anterior, bem como a (falta de) fundamentação para as mudanças levadas a cabo. O PMES trouxe muitas novidades relativamente ao seu antecessor. Para além de aspetos estruturais e organizacionais, entre outros, introduziu novos tópicos matemáticos. Poderá este acréscimo de conteúdos comprometer a abordagem de outros? Esta e outras questões que nos parecem pertinentes foram colocadas em pareceres e artigos escritos por colegas do Ensino Secundário, do Ensino Superior e/ou investigadores em Didática da Matemática/Educação Matemática. Mais detalhes podem ser consultados, nomeadamente, em (APM, 2013), (SPIEM, 2015), (SPM, 2013) e nos números 126-127 da revista *Educação e Matemática*.

Entre as questões pertinentes colocadas sobre a exequibilidade do programa, destacam-se as dificuldades de gestão relativamente ao tempo destinado a cada tema. Dada a extensão do PMES, o cumprimento do programa parece impossível ou, pelo menos, muito difícil, a menos que se opte quase exclusivamente pelo método expositivo. De facto, modelos que se afastam deste e cuja implementação implica um maior dispêndio de tempo ficam seriamente comprometidos. A vertente temporal não parece, assim, ter sido bem analisada e a extensão do PMES acabará certamente por condicionar o livre-arbítrio dos professores, nomeadamente, quanto aos métodos de ensino-aprendizagem. Paradoxalmente, o PMES anuncia uma intenção nas palavras "autonomia pedagógica e liberdade" (Bivar et al., 2014, p. 3), fundamentação utilizada para não indicar abordagens preferenciais nem aprofundamentos adequados, embora a presença destes até pudesse ser justificada por estudos da Didática da Matemática. A ausência de indicações metodológicas claras pode também, de acordo com o referido atrás, ser problemático em termos de uma futura avaliação.

Não sendo o propósito deste trabalho discutir todas essas mudanças, no que se segue focamo-nos num tópico novo – Primitivas – até aqui da responsabilidade do Ensino Superior. Este insere-se no domínio de conteúdo do PMES designado por Primitivas e Cálculo Integral (Bivar et al., 2014, p. 21), o qual foi considerado facultativo, a título excecional, nos anos letivos 2017/18 e 2018/19. Apesar da extensão do programa e da posição que o tópico nele ocupa, acreditamos que se possa pensar numa abordagem que envolva aspetos transversais como resolução de problemas, métodos de ensino-aprendizagem não expositivos, uso de tecnologia.

No contexto descrito, parece-nos oportuno tentar perceber os motivos para a inclusão do tópico supracitado no PMES e partilhar perguntas, mais ou menos frequentes, sobre primitivas, que os nossos alunos nos colocaram em unidades curriculares de Cálculo ou nas que o contemplam nos respetivos programas. Ideias de introdução ao tópico ou de ligação à Economia podem ser consultadas em (Beites & Serôdio, 2015) e (Beites, Lobo, & Serôdio, 2016).

As citadas referências contêm ainda ideias para a abordagem do tópico com Aprendizagem pelos Pares, eventualmente auxiliada tecnologicamente. Este método de ensino-aprendizagem, cujos acontecimentos precursores foram apresentados em (Beites & Romano, 2014), caracteriza-se pelos típicos eventos de votação. Estes decorrem da proposta de questões conceptuais e implicam a indispensável discussão dos alunos com os seus pares (outros alunos), sob a mediação do professor.

A INCLUSÃO DAS PRIMITIVAS NO PMES

A propósito do PMES surgiram três pareceres, um da Associação de Professores de Matemática (APM), outro da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM) e um da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM). No primeiro, a inclusão do tópico das primitivas é vista como um prenúncio do sacrifício de outros conteúdos anteriormente lecionados e, noutros momentos, encarados como mais relevantes (APM, 2013). No segundo, o tópico é considerado um acréscimo de conteúdos e refere-se ainda o desconhecimento da razão para essa alteração (SPIEM, 2015).

No terceiro parecer sobre o PMES, contrariamente aos da APM e da SPIEM, salienta-se positivamente a alteração em questão por ser, por um lado, aproximante a programas congéneres a nível internacional e, por outro lado, um complemento essencial do Cálculo Diferencial que possibilita aumentar as suas aplicações (SPM, 2013). Esta posição é consentânea com a que se encontra no balanço da consulta pública realizada, infelizmente no reduzido espaço de tempo de um mês, pelos autores do PMES:

> É um dos pontos em que o anterior Programa se encontrava claramente desatualizado e desalinhado com aquilo que é a prática da maioria dos currículos internacionais. Em particular, o TIMSS-Advanced, que se constitui como um importante referencial internacional de avaliação para alunos do final do Ensino Secundário, refere explicitamente este ponto: «Integrate polynomial, exponential, trigonometric and rational functions. Evaluate definite integrals, and apply integration to compute the area under a curve». [(IEA, 2008, p. 14)] Note-se que a abordagem preconizada neste novo Programa dá resposta a quase todos estes requisitos (Bivar et al., n.d., p. 5).

Esta mesma justificação de alinhamento com o plano internacional surge no PMES, onde se refere a participação de Portugal em duas avaliações internacionais que foram tidas em consideração: o Programme for International Student Assessment (PISA) e o TIMSS-Advanced. Os autores esclarecem ainda que, tendo em conta que o PISA avalia estudantes de 15 anos, optaram pelo TIMMS-Advanced (Bivar et al., 2014, p. 3). No que diz respeito aos conteúdos matemáticos salientam que analisaram currículos de outros países não participantes no TIMSS-Advanced, embora sem especificar quais.

Torna-se assim pertinente recordar que o *Trends in International Mathematics and Science Study-Advanced* (TIMMS-Advanced) é uma avaliação do desempenho dos alunos em Física e em Matemática no final do Ensino Secundário. O estudo é desenvolvido pela *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), associação independente formada por instituições de investigação educacional e por agências governamentais de investigação que se dedicam à melhoria dos sistemas educativos (IAVE, n.d.).

Ainda relativamente à justificação, no TIMSS-Advanced refere-se que o conteúdo de Cálculo foi definido com base no que, em princípio, surge nos anos finais de Matemática em quase todos os países participantes (IEA, 2008, p. 14). Assim, de facto, os tópicos do domínio de conteúdo Primitivas e Cálculo Integral do PMES consistem no que norteou o tópico Integrais do domínio de conteúdo Cálculo no TIMSS-Advanced. Contudo, não se utilizaram os resultados da avaliação do TIMMS-Advanced na construção do PMES, pois não participámos em 2008 e participámos sem o tópico das primitivas em 2015.

O enquadramento teórico do TIMSS-Advanced compreende duas dimensões. A cognitiva especifica os domínios dos processos de pensamento a avaliar: sabendo, aplicando e raciocinando (IEA, 2008, p. 11). A dimensão de conteúdo compõe-se das áreas a serem avaliadas: Álgebra, Cálculo e Geometria. Cada domínio de conteúdo especifica os tópicos por área, nomeadamente o do Cálculo. A organização do PMES é similar, com a terminologia coincidente de domínio de conteúdo e os verbos, como saber e justificar, que explicitam os desempenhos a evidenciar pelos alunos (Bivar et al., 2014, p. 4).

No entanto, a similitude só é parcial. No PMES fala-se pouco de raciocínio, reduzindo-se a sua menção às páginas 5 a 7, e não se utiliza o verbo raciocinar. Por outro lado, destaca-se o raciocínio hipotético-dedutivo como basilar, o que é natural na Matemática como Ciência, mas não parecem ser valorizados outros tipos de raciocínio que frequentemente o antecedem. No entanto, muitas vezes, um matemático passa pela construção de exemplos e pela enunciação de conjeturas previamente ao raciocínio marcadamente dedutivo na elaboração de uma demonstração.

Seria de esperar que outras formas de raciocínio associado ao dedutivo marcassem presença no PMES, nomeadamente o indutivo pela sua importância na atividade da Matemática e, consequentemente, no ensino da mesma. Apesar de se referir o raciocínio indutivo entre as páginas 6 e 7, em particular por presidir à formulação de conjeturas, a sua menção é fugaz. De facto, apesar do alerta, que nos parece relevante, dos perigos do raciocínio indutivo poder levar a conclusões erradas, não transparece a oportunidade de aprender a conjeturar e de compreender o papel dos contraexemplos na Matemática.

Mais adiante, na página 29, volta a falar-se em conjeturas numa abordagem experimental ao estudo de funções. Menciona-se, e a nosso ver bem, a necessidade de uma análise crítica da validade das conjeturas. Este bom prenúncio carece de continuidade, pois nada mais volta a aparecer a este respeito, em particular no tópico das primitivas. Porque não conjeturar, por exemplo, uma fórmula das primitivas de x^{α} a partir de casos particulares, valorizando o raciocínio indutivo, que depois teria de ser demonstrada? Pode-se sempre argumentar que isso é pedagogia, ao cuidado do professor, mas não é coerente referir a importância das conjeturas sem que isso se note nas metas e nos descritores do PMES.

No TIMSS-Advanced, o Cálculo é uma ferramenta essencial para compreender o mundo físico e para as carreiras científicas com base na Matemática. O referido domínio de conteúdo compõe-se dos tópicos Limites, Derivadas e Integrais (IEA, 2008, p. 12). Esta visão, espelhada no PMES, pode explicar a pergunta: Será que os responsáveis por este programa ainda perspetivam o Ensino Secundário como "uma passagem" para o Ensino Superior, não lhe reconhecendo valor por si próprio e, por conseguinte apenas destinado a quem pretende seguir estudos com forte componente científica? (SPIEM, 2015, p. 4).

Não obstante, o Cálculo Integral no PMES é positivamente olhado como um complemento fundamental do Cálculo Diferencial, permitindo uma visão de unidade e de abrangência da Análise elementar (Bivar et al., 2014, p. 22). Esta visão remete-nos para Tall (1996), onde o Cálculo, na perspetiva esquemática deste autor, é o estudo do fazer e do desfazer dos processos envolvidos, numa clara alusão à derivação e à primitivação ou, seguindo Stewart (2006), antiderivação. Infelizmente, a visão propiciada não desculpa os problemas de incoerência e de extensão do PMES e, consequentemente, da sua exequibilidade e do seu condicionamento aparentemente não desejado.

DUAS RESPOSTAS DIFERENTES?

A importância das várias representações (gráfica, algébrica, tabular e verbal) de uma função no processo de ensino-aprendizagem, bem como o estabelecimento das suas relações, é indicada por numerosos estudos da Didática da Matemática. Nomeadamente, Andrade e Saraiva (2012) e Duval (2006) consideram que este é um aspeto fundamental para a compreensão do conceito de função pelos alunos.

Em (Andrade & Saraiva, 2012) confirma-se que o processo de formação das noções matemáticas envolve a combinação do conceito definição e do conceito imagem, estes em ação recíproca. O primeiro termo em (Tall & Vinner, 1981) designa uma forma com palavras utilizadas para especificar verbalmente esse conceito. Quanto ao segundo termo, descreve a estrutura cognitiva total (imagens mentais, propriedades relacionadas e processos) associada a um conceito.

Mas mesmo num só tipo de representação, por exemplo algébrica, podem presenciar-se distintas representações onde a sua conexão se revela importante. Para o ilustar, no âmbito da primitivação imediata, vamos considerar uma tarefa inicial que diz respeito ao cálculo das primitivas de funções reais de variável real dadas por polinómios.

$$\boxed{\text{Determine } \int (3x+5)\,dx.}$$

Figura 1 . Proposta de tarefa.

Da nossa experiência em unidades curriculares do primeiro ano de diversas Licenciaturas, os alunos, recorrendo à linearidade da primitivação, costumam apresentar uma resolução similar à que se segue:

$$\int (3x+5)\,dx = 3\int x\,dx + 5\int 1\,dx = \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

Por vezes e tendo em conta a regra de primitivação imediata aplicada anteriormente,

$$\int f' f^{\alpha}\,dx = \frac{f^{\alpha-1}}{\alpha+1} + C \quad se \;\; \alpha \neq -1$$

alguns alunos escrevem uma resolução semelhante à subsequente:

$$\int (3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\int 3(3x+5)\,dx = \frac{1}{3} \times \frac{(3x+5)^2}{2} + K = \frac{(3x+5)^2}{6} + K$$

O pedido de confronto do professor aos alunos, das aparentemente distintas soluções finais da tarefa, costuma ser interessante pelas boas discussões que gera. Muitas vezes, leva-os a dizer que deve haver algo de errado em alguma das resoluções. Mas as respostas coincidem, apesar das suas diferentes representações algébricas. De facto, uma vez que $\frac{25}{6}+K$ é uma constante, tem-se:

$$\frac{(3x+5)^2}{6}+K=\frac{9x^2+30x+25}{6}+K=\frac{3}{2}x^2+5x+\frac{25}{6}+K=$$
$$=\frac{3}{2}x^2+5x+C$$

Mesmo que a oportunidade de discussão não surja naturalmente, por as produções dos alunos seguirem todas a primeira resolução, ela pode ser criada. Uma possibilidade é aquela que advém da proposta de tarefa seguinte que construímos, a qual visa a avaliação de uma resposta final pelos alunos, nomeadamente quanto à representação, e a discussão de estratégias de resolução.

> Perante a tarefa de encontrar as primitivas da função real de variável real dada por 3x+5, um aluno apresentou a resposta final
>
> $$\int(3x+5)\,dx=\frac{(3x+5)^2}{6}+C.$$
>
> Esta resposta está correta? Em caso afirmativo, explicite a resolução que a ela teria conduzido. Caso contrário, corrija-a através da resolução que poderia fazer.

Figura 2 . Proposta de tarefa.

PRECISAMOS DO MÓDULO?

Quaresma e Ponte (2014) referem que há abordagens nas aulas que favorecem o surgimento de desacordos, os quais podem levar os alunos a aspetos essenciais do raciocínio matemático tais como justificações e generalizações. Para isso, é essencial que o professor seja um condutor de discussões matemáticas, uma vertente da sua prática profissional que implica a realização de ações: convidar, apoiar/guiar, informar/sugerir e desafiar no âmbito da gestão da aprendizagem, (Ponte, Mata-Pereira, & Quaresma, 2013).

Wood (1999) destaca as potencialidades da exploração de desacordos entre alunos, no sentido de estes fundamentarem as suas posições. O professor assume-se, assim, como um mediador no processo de ensino-aprendizagem, papel relevante nomeadamente numa abordagem com Aprendizagem pelos Pares. De facto, os desacordos podem ser despoletados por uma questão conceptual e resolvidos pelas discussões entre alunos, estas mediadas pelo professor, (Beites & Romano, 2014) e (Beites & Serôdio, 2015).

Uma proposta que já gerou discussões matemáticas interessantes foi a tarefa subsequente.

> Quais são as primitivas da função real de variável real definida por $\frac{1}{x}$?

Figura 3 . Tarefa proposta sobre as primitivas de uma função.

Tipicamente, alguns alunos costumam escrever, especialmente como primeira tentativa,

$$\int\frac{1}{x}dx=\int x^{-1}dx=\frac{x^0}{0}+C$$

Outros, ou alguns na segunda tentativa, costumam apresentar

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C$$

Mas, por um lado, se $x>0$ e F(x) = ln x então $F'(x)=\frac{1}{x}$ pelo que ln x é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para x > 0. Por outro lado, se x < 0 e G(x)= ln (-x) então $G'(x)=\frac{1}{x}$ pelo que ln (-x) é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para x < 0. Atendendo a que

$$|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$$

então ln |x| é uma primitiva de $\frac{1}{x}$ para todo o x não nulo. Como todas as primitivas de uma função diferem por uma constante aditiva, então

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

Numa próxima oportunidade em contexto de Aprendizagem pelos Pares, poderemos, alternativamente, despoletar a discussão entre alunos com a questão conceptual seguinte. Esta foi construída com base nas discussões já geridas.

> A família de primitivas da função real de variável real dada por $\frac{1}{x}$ é
>
> a) $\frac{x^{-1+1}}{-1+1}+C$
>
> b) $\ln x+C$
>
> c) $-\frac{1}{x^2}+C$
>
> d) nenhuma das respostas anteriores

Figura 4. Questão conceptual sobre as primitivas de uma função.

É O PRODUTO DAS PRIMITIVAS?

Depois de aprenderem a calcular as primitivas de algumas funções de referência e de memorizarem essas fórmulas de cálculo de acordo com o descritor 1.5 do PMES, os alunos podem expandir o seu espaço de exemplos aplicando a linearidade da primitivação e explorando um conjunto de casos onde se inverte o processo de derivação de uma função composta. No apoio ao descritor 1.7 listam-se uma série de exemplos (Bivar, et al, n.d., p. 67).

Numa situação ideal em que a gestão do tempo em sala de aula permite uma atitude exploratória e construtiva da atividade matemática por parte dos alunos, o professor pode usar alguns exemplos desta lista para incentivar os alunos a gerarem eles próprios novos exemplos. Watson e Mason (2005) sublinham que "tal como noutros aspetos do pensamento matemático, é a procura de exemplos e não o produto final que promove a aprendizagem" (p. 100).

Esta atitude exploratória cria oportunidades de aceder aos processos cognitivos dos alunos e identificar alguns dos erros mais comuns no cálculo de primitivas. A experiência mostra-nos que, mesmo depois de enunciar um teorema ou escrevermos uma fórmula de cálculo dele resultante, se colocarmos como questões o cálculo de

$$\int x\, e^{x^2}\, dx \quad ou \quad \int \sin^2 x\, dx,$$

confrontamo-nos muitas vezes com as seguintes respostas erradas respetivas:

$$\frac{x^2}{2} e^{x^2} + C, \quad \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

Nestes exemplos muitos alunos recorrem ao conforto que lhes dá reconhecerem uma fórmula já aprendida, como $\int e^x\, dx = e^x + C$ ou $\int x^p\, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ e tentam aplicá-la de forma generalizada, sem controlo sobre os danos colaterais. Como refere Bagni (2000), os alunos têm tendência a estender a aplicação de regras que reconhecem como simples e familiares de forma inapropriada. Este autor identifica razões afetivas para este comportamento – o medo de problemas sem um resultado e a segurança que lhes dá aplicar uma fórmula em que confiam. Mas também identifica as raízes do problema numa denominada fraqueza algébrica – os alunos não aprenderam convenientemente algumas técnicas algébricas. O caso mais paradigmático deste comportamento é o erro cometido quando identificam a derivada do produto de funções com o produto das funções derivadas, por lhes ser familiar a propriedade da soma das derivadas ser a derivada da soma. No cálculo de primitivas enfrentamos o mesmo tipo de erro: "Professora, a primitiva do produto é o produto das primitivas não é?" Como combater esta tendência enganadora?

Nos erros anteriormente referidos, a evolução cognitiva que está em causa é na verdade aquela que está associada à aprendizagem da representação simbólica do conceito de derivada, mas entendido como um processo, no sentido dado por Tall (1996), que inclui o fazer (derivar) e o desfazer (antiderivar). Assim, o conflito cognitivo deve ser reconhecido por professor e alunos ao propor o cálculo das derivadas:

$$\left(\frac{x^2}{2} e^{x^2} + C\right)' = xe^{x^2} + \frac{x^2}{2}(2xe^{x^2}); \quad \left(\frac{\sin^3 x}{3} + C\right)' = \cos x \sin^2 x,$$

Estes e outros exemplos mediados pela intervenção do professor servirão o propósito de reconstruir a fórmula da derivada de uma função composta *(F(u(x)))'=u'(x)F'(u(x)),* e assim recuperar a primitivação aprendida como processo inverso da derivação: se *F'(x)=f(x)* então $\int u'(x)\, f(u(x))\, dx = F(u(x)) + C$.

Watson e Mason (2005) sublinham que bons exemplos ou contraexemplos matemáticos abrem perspetivas de generalização para além da sua própria particularidade. Goldenberg e Mason (2008) referem a importância da experiência com exemplos familiares na re-construção de generalizações e abstrações por parte dos alunos, classificando-os como ferramentas de mediação cultural entre os alunos e os conceitos matemáticos, sendo meios privilegiados de comunicação matemática e de contextualização. Mas esta pode ser também uma oportunidade para identificar e resolver conflitos cognitivos se procurarmos exemplos exemplares nos sentidos dados por Zazkis e Chernoff (2008). No contexto da primitivação de um produto, o que será um exemplo essencial (*pivotal example*, na designação dos autores) para identificar o conflito cognitivo? Porque não usar como (contra)exemplo um dos que mais segurança inspira nos alunos? Sugerimos escrever uma potência de *x* como produto de potências. Por exemplo, $x^3 = x\, x^2$ e provocar o conflito cognitivo começando por pedir o cálculo de

$$\int x\, x^2\, dx.$$

Mas se a provocação não for eficaz, a experiência diz-nos que provavelmente resulta com

$$\int x\sqrt{x}\, dx$$

A partir do momento em que é identificado e resolvido o conflito cognitivo, as tarefas exploratórias seguintes podem ser guiadas pela procura de exemplos de ligação (na designação de Zazkis e Chernoff (2008), *bridging examples*) à formula da primitivação por partes, cuja dedução é sugerida como exercício no apoio ao descritor 3.2 do conteúdo PCI12 do PMES (Bivar, Grosso, Loura, Oliveira, & Timóteo, n.d., p. 73). Sugerimos que se comece por considerar produtos de funções das quais os alunos conheçam as primitivas, por exemplo:

$$\int xe^x\, dx \quad ou \quad \int x \cos x\, dx$$

Se nesta fase o conflito cognitivo referido anteriormente já tiver sido resolvido, o professor pode mediar a ligação à fórmula pedindo aos alunos para calcular:

$$(x\,e^x)' = e^x + x\,e^x; \quad (x \sin x)' = \sin x + x \cos x.$$

E inverter o processo de derivação, primitivando:

$$\int (xe^x)'\,dx = \int e^x dx + \int x\,e^x\,dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int x\,e^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx,$$

$$\int (x\sin x)'\,dx = \int \sin x\,dx + \int x\cos x\,dx \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx.$$

A primeira parte da primitivação por partes pode ser identificada em mais alguns exemplos e a sua compreensão mediada pelo professor num processo participado, em que os alunos são chamados a reconhecer algumas regras, de primitivação e de derivação, e a aplicá-las criteriosamente às funções nos fatores. Mas na primitivação por partes, como o próprio nome indica, seguir-se-á a inevitável outra parte. Surgem aí diferentes graus de dificuldade consoante o exemplo.

Será que os seus alunos também lhe vão colocar estas questões?

Agradecimentos

P. D. Beites agradece o apoio do Governo Português através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto PEst-OE/MAT/UI0212/2014 do CMA-UBI.

Referências bibliográficas

Andrade, J., & Saraiva, M. (2012). Múltiplas representações: um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *Relime*, 15 (2), 137-169.

APM (2013). *Parecer da direção da APM sobre a proposta de programa de Matemática A para os cursos científico-humanísticos de ciências e tecnologias e de ciências socioeconómicas*, 5 páginas.

Bagni, G. T. (2000). "Simple" rules and general rules in some high school students' mistakes. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 21 (2), 124-138.

Beites, P. D., Lobo, F. J., & Serôdio, R. (2016). Antiderivação: uma ponte entre a Matemática e a Economia. *Gazeta de Matemática*, (179), 32-39.

Beites, P. D., & Serôdio, R. (2015). A tecnologia não é a pedagogia, mas ajuda!. *Atas do CiEMeLP2015*, 5 páginas.

Beites, P. D., & Romano, A. (2014). Nestas aulas é melhor falar do que estar calado!. *Educação e Matemática*, (129), 13-16.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2014). *Programa e Metas Curriculares - Matemática A - Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (n.d.). *Programa de Matemática A – Consulta Pública*, 6 páginas.

Bivar, A., Grosso, C., Loura, L., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (n.d.). *Caderno de Apoio 12.º Ano*. Lisboa: MEC.

Carvalho e Silva, J., Fonseca, M., Martins, A., da Fonseca, C., & Lopes, I. (2001/2002). *Programa de Matemática A – Ensino Secundário*. Lisboa: ME, DES.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l' analyse de l' activité et des productions mathématiques. *Relime*, 9 (1), 45-82.

Fernandes, D. (2011). Avaliação de programas e projetos educacionais: Das questões teóricas às questões das práticas. In D. Fernandes (Org.), *Avaliação em educação: Olhares sobre uma prática social incontornável* (pp. 185-208). Pinhais, PR: Melo.

Fernandes, D. (2013). Avaliação em Educação: uma discussão de algumas questões críticas e desafios a enfrentar nos próximos anos. *Ensaio: aval. pol. públ. Educ.*, 21 (78), 11-34.

Goldenberg, P., & Mason, J. (2008). Shedding light on and with example spaces. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 183-194.

IAVE (n.d.). *TIMSS*, http://iave.pt/np4/11.html

IEA (2008). *TIMSS Advanced Assessment Frameworks*. Chestnut Hill: IEA.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22 (2), 55-81.

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2014). A condução de discussões matemáticas como vertente da prática profissional do professor. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 169-186). Lisboa: IEUL.

SPIEM (2015). *Parecer da SPIEM*, 5 páginas.

SPM (2013). *Parecer da SPM sobre o documento Programa e Metas Curriculares - Matemática A*, 2 páginas.

Stewart, J. (2006). Cálculo. São Paulo: Thomson Learning.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer Academic.

Tall, D., & Vinner (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (2), 151-169.

Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: learners generating examples*. Mahwah: Erlbaum.

Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample examplary?. *Educational Studies in Mathematics*, 68 (3), 195-208.

Patrícia Damas Beites[1, 2],

Sandra Bento[1],

Maria Luísa Branco[3,4]

[1]Departamento de Matemática da Universidade da Beira Interior

[2]Centro de Matemática e Aplicações da Universidade da Beira Interior (CMA-UBI)

[3]Departamento de Psicologia e Educação da Universidade da Beira Interior

[4]Unidade de Investigação LabCom.IFP