Quantas Maçãs Tinha a Maria?

Eduardo Veloso, colaborador do Projecto Minerva

Um bom professor deve compreender e convencer o seus alunos que problema algum fica completamente esgotado. Resta sempre alguma coisa a fazer; mediante suficiente estudo e reflexão podemos melhorar qualquer solução e, em todos os casos, podemos sempre melhorar a nossa compreensão da solução.

G. Polya, *How to solve it*

O problema

Maria tinha um cesto com maçãs. Encontrou um amigo e deu-lhe metade das maçãs que levava e mais meia maçã. Depois encontrou outro amigo e deu-lhe metade das maçãs que ainda tinha e mais meia maçã. Finalmente encontrou um terceiro amigo e deu-lhe também metade das maçãs que lhe restavam e mais meia maçã, ficando sem nenhuma. Quantas maçãs tinha a Maria, antes de encontrar o primeiro amigo?

A (má) solução habitual

O ensino actual da Matemática leva a pensar que a solução para **todos** os problemas consiste em «pô-los em equação» e depois «resolver a equação». Mas as receitas aprendidas para transformar palavras em incógnitas e frases em equações esquecem rapidamente e, portanto, mesmo naqueles casos em que esse tipo de resolução funciona, as vagas recordações da escola são insuficientes para a pôr em prática.

No caso presente podemos realmente escrever, sendo n o número inicial de maçãs,

$n-n/2-1/2$ ... número de maçãs depois do primeiro amigo;

$n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2$ ... número de maçãs depois do segundo amigo;

$[n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2]-[n-n/2-1/2-(n-n/2-1/2)/2-1/2]/2-1/2$ ... número final de maçãs.

E igualando esta última expressão a zero, teremos a equação procurada. Caso tenhamos paciência para resolver esta equação em N, obtemos $n=7$, que é efectivamente a solução do problema posto. Mas temos que reconhecer que pouco ou nada aprendemos com este processo!

O método das tentativas

Existe uma tendência natural para procurar resolver este tipo de problemas «por tentativas», pelo menos enquanto o ensino tradicional não a esmaga («tentivas não são matemática!»). Em princípio, nada há a opor a este método, o qual, de resto, está a ser recuperado pela moderna pedagogia como processo adequado para atacar diferentes classes de problemas. É em muitos casos uma abordagem óptima, pelo menos numa fase inicial, até se «sentir» o enunciado do problema. O que deve ser sugerido, a quem se lance nesta via, é que o método das tentativas só tem sentido e pode ser eficaz na medida em que há alguma orientação na sequência das tentativas e, **sobretudo, se essa orientação é corrigida em face dos resultados que se vão obtendo.**

Por exemplo, depois da primeira tentativa (que é natural ser feita com um número ímpar de maçãs, quanto mais não seja para que a Maria não comece a cortar maçãs ao meio, logo ao encontrar o primeiro amigo...), deve perceber-se imediatamente se a segunda tentativa deve ser feita com mais ou menos maçãs (conforme, está claro, o número de maçãs com que Maria fica nesse caso é negativo ou positivo). Além disso, se em duas tentativas sucessivas se obtêm, para resto das maçãs, números de sinal contrário, isso reduz drasticamente as tentativas a fazer.

Mas, ao seguir-se por este caminho, mais cedo ou mais tarde a sugestão lógica é recorrer-se ao computador, o «rei» das resoluções de problemas por tentativas.

Resolução com recurso ao computador

Trata-se de desenvolver um programa que faça as tentativas por nós, de modo sistemático e com a rapidez que caracteriza os computadores.

Mesmo para quem seja apenas um iniciado em programação BASIC, não é difícil imaginar um tal programa (em que as tentativas consistem em supor que a Maria tinha inicialmente uma, duas, três, ... maçãs e verificar se sim ou não depois de encontrar os três amigos, fica sem nenhuma):

```
10 N=1
20 M=N
30 FOR I=1 TO 3             REM os três amigos
40 M=M-M/2-1/2              REM a mesma operação
50 NEXT I
60 IF M=0 THEN GOTO 80      REM a solução
70 N=N+1:GOTO 20            REM outra alternativa
80 PRINT N:STOP
```

O loop 30 a 50 corresponde às três vezes em que Maria dá metade das maçãs que tem e mais meia maçã, e M é a variável que contém, em cada momento, o número de maçãs com que Maria vai ficando. Se, no fim do loop, $M=0$, o programa imprime N e pára. Enquanto isso não acontecer, vão sendo feitos ensaios com um número inicial de maçãs cada vez maior ($N=N+1$, na linguagem trapalhona do BASIC).

Embora este programa resolva o problema posto, não é de modo nenhum, em minha opinião, uma solução interessante e instrutiva. Segue-se uma outra que pode dar lugar a certos desenvolvimentos com interesse.

Outra resolução do mesmo problema

Se, ao encontrar o terceiro amigo, Maria lhe deu metade das maçãs que tinha e mais meia maçã, e **ficou sem nenhuma**, então nessa altura Maria **tinha necessariamente uma maçã.** Com efeito, é claro que **uma** maçã é o único número de maçãs que verifica a condição seguinte: subtraindo-lhe metade (ou seja meia maçã) e mais meia maçã, ficam zero maçãs ($1-1/2-1/2=0$).

Por sua vez, se depois de encontrar o segundo amigo e lhe dar metade das maçãs e mais meia maçã Maria fica com uma maçã, então antes de o encontrar tinha três maçãs. Com efeito, se assim for, Maria dá $3/2+1/2=2$ maçãs e fica portanto com uma. Finalmente, do mesmo modo se vê que antes de encontrar o primeiro amigo Maria tinha 7 maçãs, pois só assim, ao dar $7/2+1/2=4$ maçãs, ficará com três maçãs.

Um caminho para chegar à solução apresentada no ponto anterior

Ao tentar, em primeiro lugar, compreender bem o enunciado do problema, surge naturalmente a ideia de que Maria repete 3 vezes a mesma operação: dar metade das maçãs que tem e mais meia maçã. Vemos assim que a própria formulação do problema o decompõe em três problemas mais simples, todos com a forma seguinte:

«Maria tem x maçãs, dá metade de x e mais meia maçã, e fica com y maçãs; quanto vale x?»

É claro que sem conhecer y (as maçãs com que Maria fica) é impossível calcular x (as maçãs que Maria tinha). Mas daqui nasce a ideia fundamental: em relação ao terceiro amigo, conhecemos o valor de y, pois diz-se no enunciado que Maria **fica sem nenhuma maçã,** ou seja $y=0$; e daí conclui-se, como vimos, que $x=1$. Então, por repetição sucessiva do mesmo raciocínio, chega-se à solução do problema posto.

Exploração do resultado e generalização

É natural (e deveria ser habitual na aprendizagem da Matemática) perguntar: **como depende a solução do problema dos dados iniciais?** Ou seja:

1. Se mantivermos todo o enunciado excepto a frase «mais meia maçã», substituindo-a por «mais uma maçã», qual será o resultado? Seguindo o método anterior de resolução, é fácil ver que Maria teria inicialmente, neste caso, 14 maçãs. Podemos ainda ensaiar outros casos e construir uma tabela, em que m é o número de maçãs que Maria tinha inicialmente e a o número de maçãs que dá a cada amigo, para além de dar «metade das que tinha» (isto é, $a=1/2$ no enunciado, $a=1$ se Maria dá «mais uma maçã», etc.).

a		m
1/2	....	7
1	....	14
1 + 1/2	....	21
2	....	28
3	....	42

Constatamos assim que, para os valores de a ensaiados, sempre que dobramos o valor de a, o valor de m vem multiplicado por 2, o que leva à

Conjectura 1: m depende linearmente de a, ou seja,

$$m=k\,.\,a, \text{ com k constante.}$$

2. Vejamos agora como varia o resultado deste problema com o número de amigos. Seguindo ainda o mesmo método, facilmente construímos uma outra tabela, em que n é o número de amigos e m o número inicial de maçãs, mantendo-se sem alteração o resto do enunciado do problema:

n		m
1	....	1
2	....	3
3	....	7
4	....	15
5	....	31

Somos levados assim à

Conjectura 2: sendo n o número de amigos e m as maçãs que Maria tinha inicialmente,

$$m=2^n-1$$

3. Os resultados anteriores estimulam-nos a procurar uma expressão que resolva este problema no caso geral. Seja então n o número de amigos que Maria encontra, $1/b$ a parte das maçãs que dá a cada um ($b=2$ se dá «metade das maçãs que tinha», $b=3$ se dá «um terço das maçãs que tinha», etc.) e a as maçãs que Maria dá a cada amigo além de dar $1/b$ das que tinha ($a=1/2$ no enunciado, por exemplo). Supomos que no fim, tal como no enunciado original, Maria fica sem nenhuma maçã.

Comecemos por ver qual o número de maçãs (m_1) que Maria tinha antes de encontrar o último amigo. Como:

$$m_1 - m_1/b - a = 0$$

tem-se

$$m_1 = a \, . \, b/(b-1) \qquad (I_1)$$

Quantas maçãs teria Maria antes de encontrar o penúltimo amigo?

De

$$m_2 - m_2/b - a = m_1$$

resulta que

$$m_2 = a \, . \, [b/(b-1) + b^2/(b-1)^2] \qquad (I_2)$$

Somos levados assim à

Conjectura 3. Se for n o número de amigos, o número m_n de maçãs que Maria tem antes de encontrar o primeiro amigo é dado por (fazendo para simplificar $c = b/(b-1)$)

$$m_n = a \, . \, (c + c^2 + \ldots + c^n) = a \, . \sum_{i=1}^{n} c^i \qquad (I_n)$$

Tentemos provar, por indução finita, que (I_n) é verdadeira para qualquer natural n. (I_1) é verdadeira, como vimos. Provemos então que (I_n) implica (I_{n+1}):

Tem-se

$$m_{n+1} = c \, . \, (a + m_n)$$

e portanto

$$m_{n+1} = a \, . \, c \, . \, (1 + \sum_{i=1}^{n} c^i)$$

ou seja

$$m_{n+1} = a \, . \sum_{i=1}^{n+1} c^i \qquad (I_{n+1})$$

A conjectura 3 é portanto, verdadeira. Em particular, fixando b e n,

$$k = \sum_{i=1}^{n} c^i$$

é constante e

$$m = k \, . \, a \qquad \text{(Conjectura 1)}$$

E se

$$b = 2 \text{ e } a = 1/2,$$

$$m_n = 1/2 \, . \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^n - 1$$

(Conjectura 2)

Outra exploração do mesmo método de resolução

Vejamos como pode ser obtido, na resolução apresentada no ponto anterior, o número de maçãs que Maria tem antes de encontrar cada amigo. Utilizaremos para isso notações e conceitos que podem ser úteis noutras situações (em que também tenhamos de resolver problemas «do fim para o princípio», como aqui).

Observemos com algum pormenor o que se passa quando Maria encontra um amigo e lhe dá 1/b das maçãs que tem e mais a maçãs. Se for x o número de maçãs que tinha e y o número de maçãs com que ficou, y obtém-se de x por meio de duas operações (ou funções, ou aplicações) sucessivas.

— a aplicação f, que consiste em subtrair x/b a x

$$f(x) = x - x/b = (1 - 1/b) \cdot x$$

— a aplicação g, que consiste em subtrair a maçãs.

Assim, f pode exprimir-se como «multiplicar por $(1-1/b)$» e g como «subtrair a». E de cada vez que encontra um amigo, Maria executa a composição das duas aplicações, ou seja, primeiro multiplica x por $(1-1/b)$ e depois subtrai a ao resultado da primeira operação. Na notação habitual

$$y = (gof) \; (x)$$

em que gof representa a composição de f com g (primeiro f, depois g).

Isso é o que Maria faz... Mas nós, para resolvermos o problema, precisamos de executar o inverso do que Maria faz, pois apenas conhecemos o resultado final (fica sem nenhuma maçã). Precisamos de passar de y para x — proceder do fim para o princípio. Ora o esquema seguinte

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift right, "f"'] \arrow[rr, bend right=50, "gof"'] & \bullet \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[l, shift right, "f^{-1}"'] & y \arrow[l, shift right, "g^{-1}"'] \arrow[ll, bend right=50, "(gof)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

mostra bem que a aplicação inversa de gof se obtém executando primeiro g^{-1} (ou seja, a inversa de g) e depois f^{-1} (a inversa de f). Como g^{-1} = «adicionar a» e f^{-1} = = «dividir por $(1 - 1/b)$», é agora claro como podemos passar de y para x: adicionamos a a y e dividimos por $1 - 1/b$. Em particular, no problema dado, como $a = 1/2$ e $b = 2$, se depois do terceiro amigo Maria fica sem nenhuma maçã ($y = 0$), então antes de o encontrar tinha

$$x = (0 + 1/2)/(1 - 1/2) = 1;$$

antes de encontrar o segundo tinha

$$(1 + 1/2)/(1 - 1/2) = 3;$$

e antes de encontrar o primeiro tinha

$$(3 + 1/2)/(1 - 1/2) = 7.$$

Notas pedagógicas

1. A maior dificuldade que surge habitualmente na resolução deste problema resulta de o enunciado apresentar a sequência de acontecimentos numa determinada ordem e a solução ter de ser encontrada raciocinando na ordem inversa, do fim para o princípio. Este método exige que se vença uma certa resistência psicológica (reforçada talvez pelo vício do «pôr em equação») a alterar a ordem em que as condições ou dados de um problema são apresentados. Mas aí reside precisamente o principal interesse do problema, a introdução e exploração de um método de resolução comum a muitos problemas de níveis diferentes de complexidade (a «backtracking strategy» da inteligência artificial).

2. Este problema presta-se para diversificar o ensino, de acordo com os interesses e aptidões diferentes que sempre coexistem na aula. Para muitos alunos, a procura de uma solução para o problema original, a utilização de tentativas e a resolução por computador serão actividades suficientes. Outros mostrarão interesse bastante para justificar o tipo de exploração do resultado apresentado no ponto em que se faz a generalização, incluindo ou não a demonstração da expressão geral. Outros ainda, certamente em menor número, terão interesse numa sistematização dos conceitos que estão na base da resolução deste e de outros tipos semelhantes de problemas e de questões de Matemática, e por isso entrarão com prazer (sobretudo se pressentirem no professor o mesmo prazer...) no género de considerações apresentadas no ponto anterior.

DESAFIO AOS «LOGOISTAS»:

Construir um programa em LOGO para resolver este problema **no caso geral.** Admitir, mesmo, que a pobre Maria fica, no fim, com algumas maçãs. A melhor solução que chegar à redacção de *Educação e Matemática* será publicada no próximo número.

LOGO e a Educação Matemática *(continuação da pág. 4)*

seja colocado ao serviço de um currículo estático, qualquer que ele seja. Pelo contrário, parte-se do pressuposto de que a aprendizagem da Matemática é um processo dinâmico que exige um currículo com grande maleabilidade. Afirmar que se trata de um ensino sem currículo seria adoptar um conceito extremamente limitado de currículo. No entanto, é possível realizar actividades em LOGO com currículo actual de Matemática mas para isso será necessário assumir alguns compromissos. O maior destes compromissos será assumir, de uma vez por todas, que cumprir os programas é essencialmente cumprir os grandes objectivos desses programas, e para tal será eventualmente necessário trabalhar em tópicos de Matemática não contemplados nos programas actuais assim como dar um tratamento menos aprofundado noutros desses conteúdos.

Aliás esta poderá ser uma forma interessante de os professores reflectirem nos actuais programas, questionarem-se acerca da pertinência de alguns dos seus tópicos e contribuirem para uma reformulação gradual que é entendida em geral como imprescindível.

O LOGO como instrumento de trabalho

A linguagem LOGO deve ser considerada, nas actividades com os computadores em educação, como instrumento de trabalho. A sua aprendizagem deve ser realizada gradualmente, de acordo com as exigências dos problemas que queremos resolver. Não é preciso saber tudo de uma vez. Novos comandos e novas operações serão aprendidas de acordo com as necessidades dos projectos que vamos desenvolvendo.

Neste momento, existem diversas versões de LOGO disponíveis para diferentes tipos de computadores. A possibilidade de usar diversas tartarugas, de as programar de forma dinâmica e de definir formas especiais para atribuir a essas tartarugas, abre possibilidades cujos limites são a nossa própria imaginação. E é aqui que reside a questão fundamental. A criação de situações de aprendizagem nesta perspectiva exige do professor trabalho e criatividade.

O LOGO e o professor

A experiência vem demonstrando que é exactamente no contexto do trabalho realizado com os alunos que as ideias poderosas surgem e que a própria aprendizagem da linguagem ganha mais sentido. Naturalmente que o professor não deve esperar ir para a aula 'armado' com todas as ideias e sugestões ou esperar 'saber LOGO' para iniciar as actividades. Grande parte das iniciativas vêm dos alunos, e mais do que ninguém são eles que determinam o êxito deste tipo de actividades.

O objectivo das actividades de programação na linguagem LOGO é o problema ou a situação que queremos investigar. Deste modo, a aprendizagem da linguagem LOGO faz parte do próprio processo de trabalho. Não é necessária uma longa e árida aprendizagem prévia dos elementos de programação antes de se começar efectivamente a programar. Pelo contrário, estamos sempre a aprender novas combinações de instruções para produzir determinado efeito. E é exactamente esta característica simultaneamente de facilidade de utilização e de abertura aos nossos projectos que faz a linguagem LOGO um instrumento de trabalho poderoso e aliciante, desafiando permanentemente a nossa imaginação.