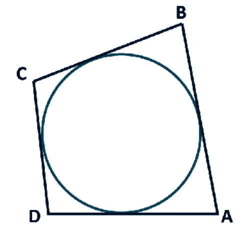
Um quadrilátero circunscrito



O quadrilátero ABCD circunscreve uma circunferência (a figura é apenas ilustrativa).
O lado AB mede 46 centímetros, o lado BC 40 centímetros e o lado CD 32 centímetros.
1.ª Pergunta: Quanto mede o lado DA?
2.ª Pergunta (para os entusiastas da tecnologia): De todos os quadriláteros nestas circunstâncias, qual é a área do maior? Qual é, neste caso, o raio da circunferência que ele circunscreve?

(Respostas até 31 de março, para zepaulo46@gmail.com*)*

ÀS VOLTAS COM A SEQUÊNCIA DE LUCAS

O problema proposto no número 137 de *Educação e Matemática* foi este:

O Carlos começou a escrever os primeiros termos da sequência de Lucas, aquela que começa com os números 1 e 3 e, depois, cada termo é igual à soma dos dois anteriores: *1, 3, 4, 7, 11, 18, ...*

O Luís, que o estava a observar, desafiou-o: – Descobre lá qual vai ser o algarismo das unidades do termo que ocupa a posição 2016.

O Carlos não se atrapalhou, fez uns cálculos e deu-lhe a resposta certa.

Que algarismo é esse?

Recebemos 13 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Catarina Ferreira (Viseu), Edgar Martins (Queluz), Carlos Dias, Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Graciano Martins (Carregado), Ilca Cruz (Amadora), José Carlos Frias, Luís Lopo (Montijo), Luís Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e Mário Roque (Guimarães).

A primeira resolução que nos chegou foi da Alice e começava assim:

Adorei o problema que chegou hoje no correio. Deixei as coisas urgentes e fui resolver.

O método seguido pelos nossos leitores foi praticamente o mesmo. Demos a palavra à Graça:

O algarismo das unidades de cada termo obtém-se adicionando os algarismos das unidades dos dois termos anteriores. Vamos estudar a sequência dos algarismos das unidades dos primeiros termos da sequência de Lucas e procurar regularidades.

Ao que o Edgar acrescentou:

Chegar ao termo 2016 ia levar algum tempo. Se o Carlos apenas fez alguns cálculos deve haver algum "truque".

Realmente, repare-se no que acontece se fizermos uma tabela para os primeiros casos.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Algarismo	1	3	4	7	1	8	9	7	6	3	9	2	1	3	...

Como facilmente se constata, os algarismos das unidades repetem-se em sequências de comprimento 12. Assim, uma vez que 2016 = 12×168, o algarismo das unidades do termo de ordem 2016 é 2. [Graça]

O Edgar foi mais longe:

Só para confirmar, fui buscar a minha velhinha TI-83 e fiz correr este programa:

```
1 → A
3 → B
For(N,1,2014)
B → C
10 * (fPart((A+B)/10))→ B
C → A
End
Disp B
```

e bateu certo :)

O Mário acrescentou:

Já agora uma nota extra que, dada a dimensão do termo envolvido, é neste caso... absolutamente inútil.

Com algum trabalho, pode demonstrar-se que o termo geral da sequência de Lucas é

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Pois é... o eterno número de ouro ataca de novo e permite até uma escrita mais elegante:

$$\phi^n+(-\phi)^{-n}$$

Finalmente, o Alberto aproveitou a "embalagem" e resolveu o mesmo problema para mais duas sequências.

Na sequência de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), a sequência das terminações é periódica de período 60. Neste caso o termo na posição 2016 termina em 5.

No caso da sequência de Mersenne (termo geral 2^n-1) a sequência das terminações é periódica de período 4. Neste caso o termo na posição 2016 termina em 5.

Publicações APM

Esta coletânea de textos de autoria de Eduardo Veloso, editada pela Associação de Professores de Matemática (APM) e da responsabilidade do Grupo de Trabalho de Geometria (GTG), tem por fim o desenvolvimento profissional dos professores nos ensinos básico e secundário, em particular no tema da Geometria. Tentaremos ter em atenção, como fator orientador dos conteúdos que escolhemos para os textos e da forma como são tratados, o propósito cultural que enfatizamos para o currículo de matemática, nomeadamente o conhecimento da sua história, da sua intervenção nas diferentes civilizações e das características próprias como aborda a realidade e se desenvolve como ciência.

A coletânea foi iniciada em 2012 e estão publicadas as seguintes obras:

- Simetria e Transformações Geométricas
- Conexões da Geometria: a recta real
- Conexões da Geometria: O plano complexo