A curiosidade matemática e a tecnologia

José Paulo Viana

O avanço da tecnologia veio permitir abordar a Matemática de formas inovadoras e muito diferentes das tradicionais. Agora, torna-se possível, a qualquer pessoa com um mínimo de curiosidade, fazer investigações, colocar conjeturas e descobrir resultados que anteriormente lhe estariam vedados ou que nem sequer se lembraria de iniciar. Vejamos alguns exemplos.

A área do estádio da Luz

Se consultarmos o *GoogleMaps* na Internet e formos à cidade de Lisboa, podemos ver que o Estádio da Luz tem uma forma curiosa: parece ser uma elipse ou uma oval. Surge então uma questão: será que, usando a tecnologia, conseguimos descobrir que área tem o estádio? É o que vamos tentar saber.

No computador, ampliamos a cidade de Lisboa até se ver claramente o estádio da Luz, reorientamos o mapa para que o eixo maior do estádio fique na horizontal e capturamos a parte do ecrã que nos interessa.

Com a *Ti-Nspire*, abrimos um novo documento com uma página de *Gráficos* e importamos a imagem anterior. Arrastamos a página de modo que a origem do referencial coincida com o centro do campo de futebol (figura 1).

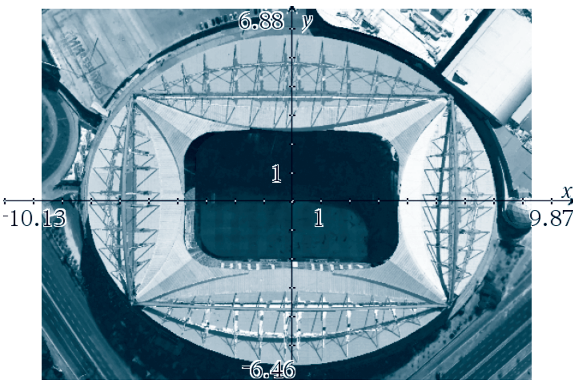

Figura 1.

Temos agora de fazer com que a escala do referencial se adeque à realidade. Como o comprimento dos campos de futebol dos campeonatos da UEFA é de 105 metros (esta informação é fácil de encontrar na Internet), a distância do centro do campo a uma das balizas é de 52,5 metros. Dá jeito considerar o hectómetro como unidade de medida. Marcamos então o ponto de coordenadas (-0,525; 0) e, *agarrando* no eixo, fazemos com que ele coincida com a baliza do lado esquerdo (figura 2).

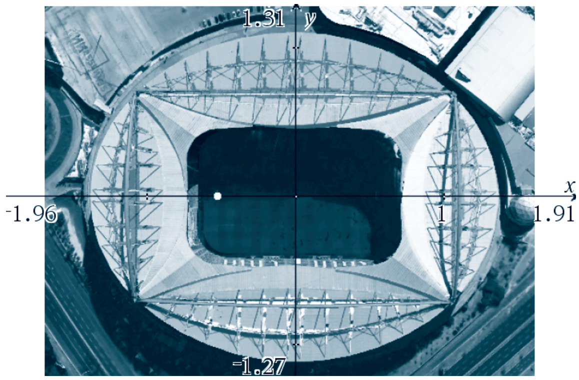

Figura 2.

Vamos agora ver se a forma do estádio é realmente uma elipse. Para isso, precisamos de saber as medidas dos semieixos maior e menor. Marcamos a origem O do referencial, um ponto P na extremidade do semieixo maior, um ponto Q na extremidade do semieixo menor, e pedimos depois as distâncias de O a P e a Q (figura 3).

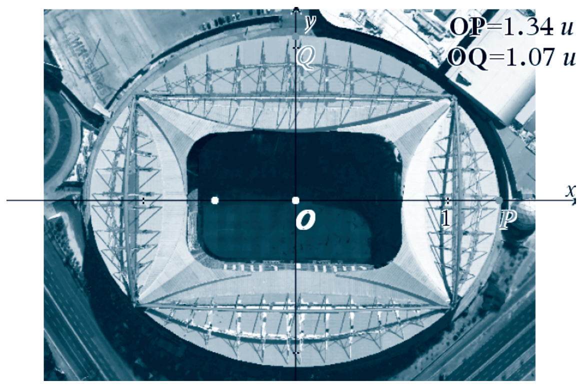

Figura 3.

Temos então $\overline{OP}$= 1,34 hm e $\overline{OQ}$= 1,07 hm.

No editor de funções, escolhemos *1:Introdução/Edição de gráficos, 3:Modelos de equações, 4:Elipse,* que nos permite escrever a equação da elipse conhecidos os semieixos (figura 4).

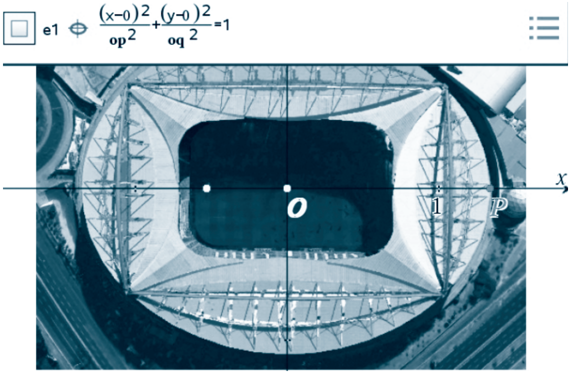

Figura 4.

Obtida a elipse (que confirmamos coincidir exatamente com a forma do estádio), resta-nos pedir a área da elipse (figura 5).

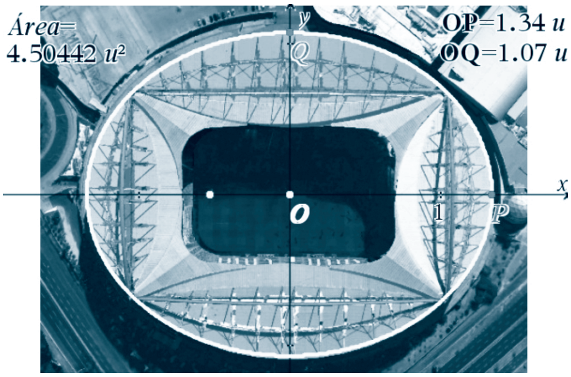

Figura 5.

O estádio da Luz tem uma área de 4,5044 hectares ou 45044 m².

Em vez de pedir a área, poderíamos tê-la calculado diretamente.

Como sabemos, a fórmula da área da circunferência é $A_{circ} = \pi.r^2$. A elipse (que é como "uma circunferência de *raio variável*") tem uma fórmula relacionada:

$A_{elipse} = \pi.(semieixo\ maior).(semieixo\ menor) =$

$= \pi \times 1{,}34 \times 1{,}07 = 4{,}5044$ hectares

op	1.34
oq	1.07
$\pi \cdot op \cdot oq$	4.50442

Figura 6.

Epílogo: Antes de fazer este trabalho, tínhamos tentado encontrar na Internet a informação da área do estádio, mas sem êxito. No final, fizemos nova e mais cuidadosa pesquisa e tivemos mais sorte. Na página http://www.maisfutebol.iol.pt/geral/24-10-2003/estadio-da-luz-a-casa-nova-do-benfica-em-numeros vem lá que a área é de 45000 m². Podemos ficar satisfeitos, os valores estão muito próximos um do outro.

Uma nota final. Escolhemos o Estádio da Luz porque é o único que se adequa a um estudo deste tipo. Com os outros, o problema seria ou demasiado simples ou bastante complicado. É que o do Dragão e o de Alvalade são circulares, o de Braga é um retângulo, e os de Guimarães e Algarve têm formas estranhas.

A coleção de cromos

Comecemos com um problema:

Em média, quantos lançamentos de um dado normal é preciso fazer para que saiam todos os números, de 1 a 6?

Uma forma de obter um valor aproximado desta média seria fazer "muitas" experiências. Poderíamos usar dados verdadeiros (de preferência pondo muita gente – alunos? – a fazê-lo...). Outra hipótese, menos trabalhosa e mais rápida, era fazer simulações, usando a tecnologia. Quantas mais experiências fizermos, mais confiança podemos ter na média obtida, mas nunca saberemos o valor real.

Vamos fazer um parêntesis antes de avançarmos com este problema.

Uma das séries mais famosas e estudadas é a série harmónica:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$

Os termos da série são cada vez menores e tendem para zero. No entanto, à medida que k aumenta, a série ultrapassa qualquer valor que se queira e tende para infinito. Verifiquemos isto, calculando o somatório para 10, 100, 1000, ... parcelas (figura 7 e 8).

$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1.}{k}\right)$	2.92897
$\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1.}{k}\right)$	5.18738
$\sum_{k=1}^{1000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	7.48547

Figura 7.

$\sum_{k=1}^{10000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	9.78761
$\sum_{k=1}^{100000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	12.0901
$\sum_{k=1}^{1000000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	14.3927

Figura 8.

Os valores do somatório vão aumentando regularmente, com um valor quase constante (figura 9).

$k=1$	
$\sum_{k=1}^{1000000}\left(\frac{1.}{k}\right)$	14.3927
5.1873775176394−2.9289682539682	2.25841
7.4854708605505−5.1873775176394	2.29809
9.7876060360459−7.4854708605505	2.30214
12.090146129764−9.7876060360459	2.30254
14.392726722897−12.090146129764	2.30258

Figura 9.

Parece até que estas diferenças entre valores (quando o número de parcelas vai sendo multiplicado por dez) estão a tender para um número. Prova-se que esse número é precisamente o logaritmo neperiano de 10:

$$\ln 10 \cong 2{,}302885$$

Voltemos ao nosso problema, que é um caso particular do Problema das coleções. Este tipo de problemas já foi resolvido teoricamente e a sua solução está precisamente relacionada com a série harmónica.

Com efeito, se quisermos fazer uma coleção de *n* objetos obtidos aleatoriamente, em média o número de objetos a juntar é dado por:

$$média = n\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = n\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

No nosso caso, a coleção tem 6 elementos (as seis faces do cubo). Logo, o número médio de lançamentos a fazer é:

$$média = 6\times\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{k} =$$

$$= 6\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) = \frac{147}{10} = 14{,}7$$

Ou seja, em média, é preciso lançar o dado 14,7 vezes até que saiam as seis faces.

Aproveitemos isto para analisar uma nova situação.

Sempre que há uma grande competição futebolística, a *Panini*, uma empresa italiana especializada, lança uma coleção de cromos. Foi o que aconteceu com o Euro 2016.

Figura 10.

A coleção tem 680 cromos. Por curiosidade, podemos então calcular, em média, quantos cromos era preciso comprar para fazer a coleção completa, se aceitássemos apenas o acaso e não fizéssemos trocas com outros colecionadores.

$$680\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{680}\right) \cong 4828$$

Como cada carteira custa € 0,70 e tem cinco cromos, cada cromo fica ao preço de € 0,14.

A despesa total média seria de

4828 x 0,14 = 675,92 euros.

Mas este preço, elevadíssimo, é irrealista porque podemos fazer trocas. Vamos imaginar que, com muita sorte e com muitos colecionadores conhecidos, fazíamos a coleção completa comprando o mínimo de cromos. Neste caso ideal, gastaríamos

680 x 0,14 = 95,20 euros.

Com o preço da caderneta, iríamos gastar cerca de 97 euros.

Agora reparem. Se a *Panini* pusesse as cadernetas já completas à venda por €97, alguém as compraria? Duvido muito. Quase toda a gente acharia (e com razão...) que era demasiado caro. Mas assim, em saquetas, milhares de pessoas em Portugal gastam muito mais por uma coisa que vale muito menos.

Para terem uma ideia de quão bom é este negócio, nas últimas épocas, a *Panini*, segundo os dados disponíveis na sua página da Internet, produziu anualmente um bilião (sim, um bilião!) de saquetas por ano. O que corresponde a 6 biliões de cromos!

As curvas da torre eiffel

Um dos principais motivos que fazem com que a Torre Eif-fel seja tão apreciada tem a ver com as suas caraterísticas estéticas. Tem uma beleza que nos atrai. As suas proporções e as suas linhas são muito agradáveis e não há quem vá a Paris e não a visite e fotografe (figura 11).

Figura 11.

A torre foi construída para ser a porta de entrada da Exposição Universal de 1889, que comemorou os cem anos da Revolução Francesa. Curiosamente, deveria ser desmantelada após a exposição, mas o seu êxito foi tal que se decidiu mantê-la.

O projeto da torre foi feito por Gustave Eiffel e pelo seu gabinete de engenharia. Os cálculos desenvolvidos acabaram por se perder mas o próprio Eiffel, num documento que se preservou, afirma que, em cada ponto, o momento das forças aplicadas pelo vento é igual e oposto ao momento do peso da estrutura.

Dois matemáticos dos Estados Unidos resolveram refazer os cálculos seguindo estas indicações. Para obter a curva do perfil da torre, tiveram de resolver uma equação integro-diferencial. Qualquer coisa como o que se vê na figura 12, em que a incógnita é a função *f* e onde aparecem também o integral e a derivada de *f*.

$$f(x).\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = f'(x).\int_{x_0}^{x} (x-t)f(t)\,dt$$

Figura 12.

Verificaram que a solução é uma função exponencial. Não encontrámos na Internet mais nenhuma informação sobre a expressão analítica da função nem sabemos resolver este tipo de equação. Por isso, vamos descobri-la (aproximadamente, claro) usando a tecnologia.

Arranjámos uma boa fotografia da torre e colocámo-la numa página de Gráficos. Fizemos com que o eixo horizontal coincidisse com a base e que o eixo vertical fosse eixo de simetria da torre. Resolvemos usar o hectómetro (100 metros) como unidade de medida. Para que tudo ficasse à escala e como a altura da torre é de 324 metros, marcámos o ponto P de coordenadas (0; 3,24), ajustando depois a escala dos eixos de modo que o ponto P ficasse sobre o ponto mais alto da torre (figura 13).

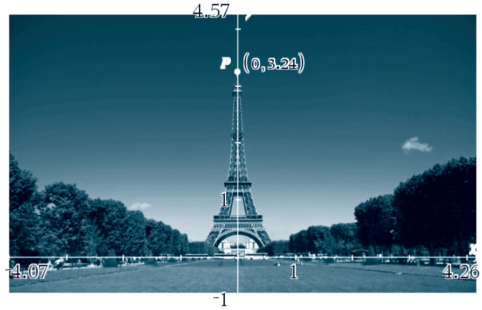

Figura 13.

Vamos procurar uma função exponencial do tipo $f(x) = a.b^x$

Criamos dois seletores. Um para o parâmetro *a*, a variar entre 1 e 4, outro para *b*, a variar entre 0 e 0,05 (figura 14).

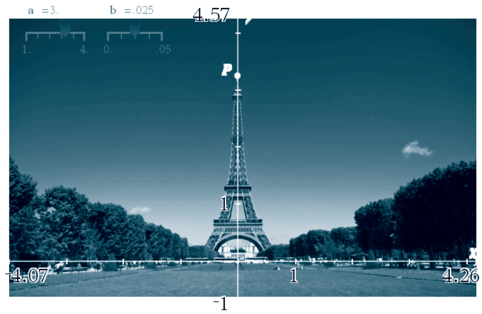

Figura 14.

No editor de funções introduzimos $f(x)=a.b^x$. Vamos agora, com a ajuda dos seletores, alterar os valores de *a* e *b*, tentando encontrar uma função cujo gráfico se adapte ao perfil direito da torre.

Isso acontece para a=3,24 e b=0,013 e portanto $f(x)$=3,24x0,013^x.

Descoberta a função f_1 do lado direito, a do perfil esquerdo é $f_2=f_1(-x)$.

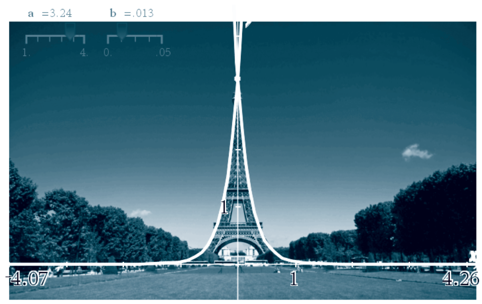

Figura 15.

O resultado é o que se mostra na figura 15.

Estão a ver? Que maravilha.

A partir de agora, será inevitável. Cada vez que virmos a Torre Eiffel (ao vivo, numa fotografia, num filme) vamos ver também a matemática que lá está e as exponenciais do seu perfil. E vamos achá-la ainda mais bela.

José Paulo Viana