Ver as estrelas… com o *Geogebra*

Lina Brunheira

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) são uma família de programas assentes na mesma funcionalidade: todos fornecem um conjunto de ferramentas de construção e medição rigorosas que permitem construir elementos livres (por exemplo, segmentos ou pontos arbitrários), podendo ser movidos ou transformados quando arrastados por um cursor, e outros elementos construídos a partir daqueles (frequentemente designados por dependentes) e que se ajustam automaticamente de forma a preservarem todas as relações de dependência da construção inicial (King & Shattschneider, 2003). Estas caraterísticas tornam possível uma outra funcionalidade que é a manipulação das figuras através do arrastamento mantendo as suas propriedades. Por um lado, a manipulação da construção faz emergir as propriedades que se mantêm invariantes ao arrastamento e, por outro, funciona como um teste que permite validar se a construção está ou não correta.

King e Shattschneider (2003) apresentam oito razões para utilizar os AGD: (i) tirar partido do rigor das construções geométricas e das suas medições que conduzem a um elevado grau de confiança nos resultados obtidos; (ii) promover a visualização, já que o AGD "ajuda os alunos a *ver* [itálico dos autores] o que significa um facto verdadeiro em geral" (p. 10); (iii) incentivar a exploração, investigação e descoberta conduzindo à formulação de questões (em especial, a questão "e se?") e conjeturas, bem como o seu teste; (iv) motivar para a demonstração, pois a evidência experimental obtida com o AGD oferece a convicção necessária para tal empreendimento, além de que o próprio AGD pode fornecer pistas úteis para a construção dessa demonstração; (v) apoiar a compreensão das transformações geométricas, pois ao testemunharem os efeitos destas transformações, os alunos percebem que não são meras fórmulas simbólicas e apercebem-se melhor das suas propriedades; (vi) apoiar a compreensão dos lugares geométricos, particularmente de algumas curvas clássicas para as quais é usada, na maioria das vezes, uma abordagem analítica; (vii) fornecer oportunidades de simulação de uma enorme variedade de situações; e (viii) possibilitar a criação de micromundos através da utilização de scripts que produzem novas ferramentas, permitindo a exploração de geometrias não-euclidianas.

Uma ênfase que tem sido dada à utilização dos AGD é a realização de construções geométricas. Laborde (2001) compara este tipo de atividade quando realizada com recurso a um AGD (no caso o *Cabri-Géomètre*) versus com recurso a papel e lápis. Na sua opinião, quando fazemos construções com papel e lápis, a atividade é muitas vezes controlada pela perceção em vez de ser orientada pelas propriedades da figura. Ao contrário, num AGD não é possível construir um quadrado "a olho" e é necessário mobilizar um conjunto de propriedades que possam definir a figura, as quais são veiculadas através das ferramentas usadas na construção.

Esta capacidade de identificar as componentes de uma figura e relacioná-las entre si de várias formas – uma componente fundamental da capacidade de visualização – deve ser promovida continuadamente, como defendem as orientações curriculares provenientes da investigação em didática da matemática. Por exemplo, o NCTM afirma que "os alunos que conseguem visualizar de maneiras diferentes uma dada configuração podem possuir mais conhecimentos e poder matemáticos do que aqueles que estão limitados a uma única perspetiva" (NCTM, 2007, p. 118). No número temático anterior da *Educação e Matemática*, dedicado à criatividade, Isabel Vale (2015) fala-nos mesmo da "arte de ver" referindo Leonardo da Vinci, para quem esta capacidade estava na raiz da inventividade e criatividade. Mas também na matemática, o conceito de "olho geométrico", da autoria do matemático do início do século XX Charles Godfrey, e recuperada por Fujita e Jones, enfatiza "o poder de ver as propriedades geométricas destacadas da figura" (2002, p. 385).

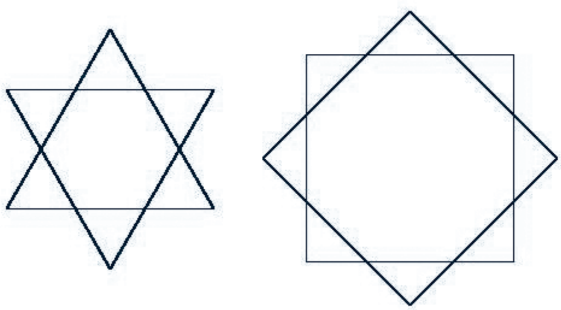
Na verdade, a forma como configuramos os objetos geométricos está, para Battista (2008), na base do raciocínio geométrico e pode ser descrita a partir dos conceitos de estruturação espacial, geométrica e lógica/axiomática. A estruturação espacial é um tipo de abstração correspondente ao ato mental de construir uma organização ou uma configuração para um objeto ou conjunto de objetos, através da identificação das suas componentes, da forma como se combinam e relacionam.
A estruturação geométrica descreve a estruturação espacial através de conceitos formais, tais como congruência, paralelismo, ângulo, transformações geométricas ou sistemas de coordenadas. A estruturação geométrica assenta na estruturação espacial, isto é, para que seja possível estruturar

geometricamente um objeto, é necessário que o indivíduo tenha interiorizado a estruturação espacial correspondente. A estruturação lógica/axiomática organiza formalmente os conceitos geométricos num sistema para que as suas relações possam ser estabelecidas através de dedução lógica.

Nos próximos pontos, analisarei algumas construções geométricas produzidas por estudantes da Licenciatura em Educação Básica com recurso a um AGD, procurando compreender a forma como estruturam as figuras. As resoluções apresentadas pertencem a Catarina Chaves, Carolina Rodrigues e Francisco Cruz e foram selecionadas por representarem a diversidade de raciocínios que surgiram na atividade.

Construir estrelas

1. Construa cada uma das estrelas. Descreva sumariamente o processo de construção que usou.



2. Para cada uma das estrelas obtenha um outro processo distinto de construção. Descreva sumariamente o processo usado.
3. Construa outras estrelas desta família com maior número de vértices, usando processos de construção análogos. Generalize um dos processos de construção que usou.
4. Estabeleça relações entre o número de pontas da estrela e outros elementos da construção.

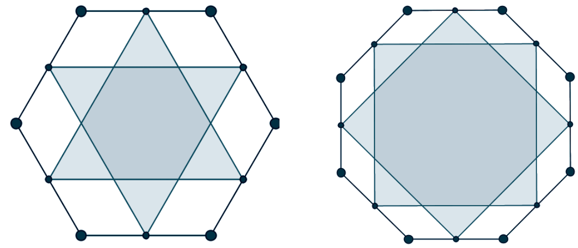
Figura 1. Tarefa Construir estrelas (adaptada de Johnston-Wilder e Mason, 2005).

As construções geométricas dizem respeito à tarefa apresentada na figura 1, resolvida na sala de aula com recurso ao Geogebra. As resoluções que apresento são retiradas dos seus portefólios[1].

Resolução de Catarina

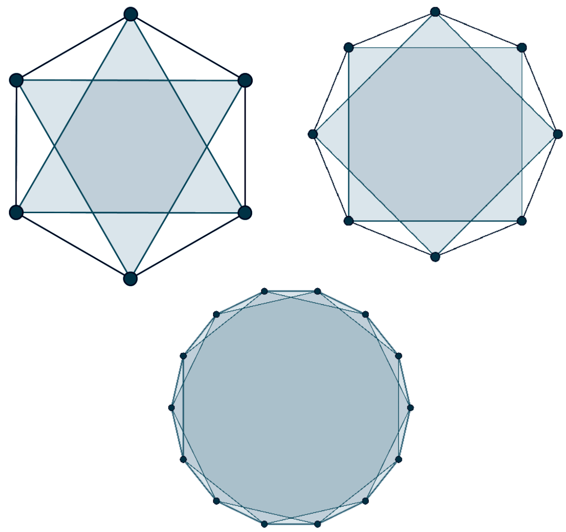
Nesta resolução apresento os dois processos utilizados por Catarina, sendo que o processo A é descrito estritamente para as estrelas de 6 e 8 pontas e o B tem uma descrição generalizada à construção de qualquer estrela desta família.

Processo A



Estrela de 6 pontas: Construir um hexágono regular, encontrar os pontos médios de cada lado e unir os pontos médios não consecutivos. Estrela de 8 pontas: O mesmo processo começando com um octógono.

Processo B



Construir um polígono com um determinado número de lados e construir dois polígonos nele a partir da união de vértices não consecutivos.
O número de pontas das estrelas corresponde ao número de vértices do polígono utilizado para a sua construção. Não é possível utilizar [este processo] com base em polígonos regulares de número de lados ímpar, uma vez que não existem dois conjuntos de pontos não consecutivos que possam ser unidos.

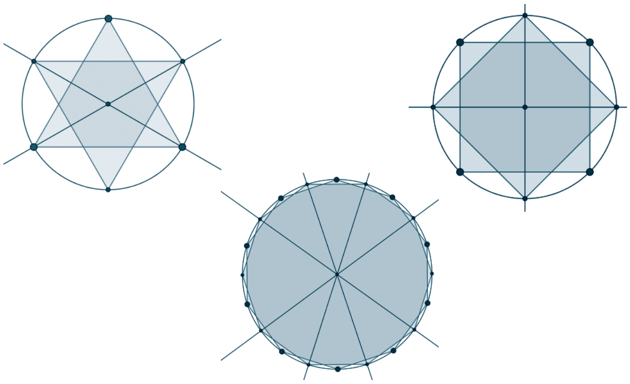
Figura 2. Resolução de Catarina da tarefa *Construir estrelas*.

Ambas as construções assentam na visualização da estrela como uma figura só (ou seja, como um todo) e um hexágono regular (no caso da estrela de 6 pontas) onde a estrela se inscreve de duas formas – no processo A, os vértices da estrela coincidem com os pontos médios dos lados do hexágono e, no processo B, com os vértices do hexágono. Assim, em qualquer dos casos, são mobilizados elementos invisíveis e que foram criados para auxiliar a construção da estrela. Curiosamente, o processo A com que Catarina inicia a construção é menos direto do que o processo B, já que implica a determinação dos pontos médios dos lados do polígono regular. Uma possível explicação para esta sequência é o facto de o hexágono que é visualizado no processo A estar na posição em que essa figura é habitualmente apresentada, o que pode ter levado a formanda a visualizá-lo mais rapidamente do que o hexágono no processo B.

No que diz respeito à generalização, Catarina consegue apresentar um processo que pode ser aplicado a qualquer estrela e estabelece uma relação entre o polígono de que parte e o número de vértices da estrela. Finalmente, identifica que o polígono regular inicial não pode ter um número de lados ímpar e apresenta uma justificação para esta conclusão.

Resolução de Carolina

Carolina construiu as estrelas recorrendo a um processo idêntico ao processo B de Catarina e outro processo, apresentado na figura 3, que descreve generalizado para qualquer estrela.



1. Construir uma figura inicial de acordo com o número de pontas da estrela pretendido (este polígono deverá ser um polígono regular em que o seu número de vértices é metade do número de pontas da estrela). 2. Traçar as mediatrizes de cada um dos lados do polígono previamente construído para assim ser descoberto o seu centro. 3. Traçar uma circunferência com centro no ponto de interseção das mediatrizes e com raio até um dos vértices da figura 4. Os pontos de interseção entre as mediatrizes e a circunferência serão os vértices da segunda figura que compõe a estrela.
O número de pontas da estrela é o dobro do número de lados da figura que se usa inicialmente para a construção.

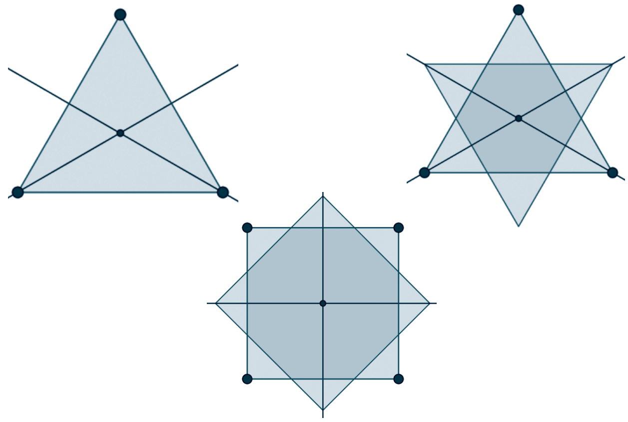
Figura 3. Resolução de Carolina da tarefa *Construir estrelas.*

Ao contrário do primeiro processo que utilizou, nesta construção Carolina olha para a estrela decompondo-a em dois polígonos regulares congruentes, sendo que um deles constitui o ponto de partida para a construção. A determinação do segundo polígono implica a visualização da estrela inscrita na circunferência e, além disso, a visualização dos vértices do segundo polígono contidos nas mediatrizes (um conceito que não dominava), o que significa o reconhecimento de que os vértices consecutivos da estrela são equidistantes entre si e ainda equidistantes do centro da estrela. No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, identifica que este é o dobro do número de vértices do polígono inicial, mas não justifica porquê.

Resolução de Francisco

O segundo processo a que Francisco recorre e que apresento na figura 4, tem uma primeira formulação para a estrela de 6 pontas e uma segunda generalizada a qualquer número de pontas.

Neste processo, Francisco olha para a figura da mesma forma que Carolina, ou seja, decompondo a estrela em duas figuras congruentes. A sua resolução acaba por ser equivalente à da sua colega porque recorre às mesmas re-



Construção de um polígono regular de 3 lados. Marcam-se as mediatrizes dos lados para encontrar o ponto de interseção. O passo seguinte consiste na rotação da figura em torno do ponto de interseção e amplitude 60° = (360/(3 x 2))
Começar com qualquer polígono regular de *x* lados e rodá-lo em torno do ponto central com uma amplitude de 360°/(n.° lados do polígono x 2)
Número de pontas = n.° de lados do polígono inicial x 2
Número de pontas = 360/amplitude de rotação

Figura 4. Resolução de Francisco da tarefa *Construir estrelas.*

lações – a equidistância entre os vértices consecutivos da estrela e entre estes e o centro da estrela. Contudo, Carolina parece olhar para a estrela de um ponto de vista estático, enquanto Francisco visualiza o "movimento" de rotação do primeiro polígono de forma a obter o segundo e assim construir a estrela.

No que respeita às relações entre elementos da construção e o número de pontas da estrela, Francisco estabelece duas relações válidas – com a amplitude de rotação e com o número de lados do polígono inicial. Além disso, generalizou o processo de construção mobilizando uma terceira relação entre a amplitude do ângulo de rotação e o número de lados do polígono inicial.

O papel do *Geogebra*

As resoluções que apresentámos são todas válidas e todos os participantes foram bem-sucedidos na resolução da tarefa, tendo elaborado as construções através de processos diferentes e mostrando ainda grande envolvimento na atividade. O facto de esta tarefa ter sido escolhida para constar no portefólio individual por quase todos os estudantes, constitui também um indicador de que o trabalho realizado foi considerado bastante significativo. Na verdade, este aspeto foi referido por todos e as reflexões constantes nos portefólios suportam algumas das conclusões que passarei a apresentar.

A principal conclusão que pretendo destacar é que o *Geogebra* potencia significativamente a estruturação geométrica, o que deriva de diferentes características e potencialidades que reconhecemos no AGD. Começo com duas características – a facilidade de utilização e o rigor das construções – as quais associo a duas potencialidades – a promoção da intuição e da exploração. Por vezes, foi notório que os estudantes começavam a construção partindo da intuição de que a utilização de algumas propriedades ou elementos da figura (ou figuras auxiliares) poderiam ser úteis para o fim em vista, mas sem certeza. A possibilidade de testar facilmente essas conjeturas através de uma construção rápida e rigorosa, ou voltar atrás caso não se verificassem, foi um aspeto determinante, como podemos reconhecer nas palavras de Catarina:

> Com a aplicação do *Geogebra*, foi possível explorar diferentes formas de construção de estrelas utilizando polígonos, retas, pontos médios, retas paralelas, entre outros, de forma fácil, simples e com rigor. A não utilização desta aplicação traduzir-se-ia num processo longo e relativamente difícil, especialmente no momento de construção dos polígonos regulares utilizados como base para a construção das estrelas. (Portefólio)

Outra potencialidade do *Geogebra* que emergiu em alguns momentos é a promoção da justificação. De facto, a possibilidade de testar a validade das construções, quase num processo de tentativa e erro, não significa que os estudantes não tenham refletido sobre os passos a dar para chegar à estrela pretendida, como observamos no comentário de Ana Lúcia:

> Após a descoberta da ferramenta que realizava a rotação da figura selecionada, segundo um ângulo escolhido por mim, tive de refletir sobre qual o valor que deveria aplicar a cada polígono regular consoante o número de lados de cada um. Este foi um ponto que me fez demorar mais tempo a resolver a tarefa, pois tive de parar e pensar sobre o porquê de o ângulo de rotação diferir conforme o número de lados, assim como, encontrar uma resposta matemática que me apresentasse o valor correto referente a cada figura geométrica. (Portefólio)

No caso desta formanda, vemos que sentiu a necessidade de refletir sobre o valor da amplitude a introduzir mas, mais do que isso, essa ação conduziu-a a pensar na justificação do valor escolhido, relacionando-o com o número de lados do polígono original. Desta forma, vemos que apesar de o AGD ter um papel importante na convicção do utilizador de que uma relação é válida, podendo conduzir à subvalorização da justificação ou prova, ele pode ter o efeito contrário, ou seja, promover a procura da justificação para as relações encontradas. Esta ideia estende-se ainda às construções impossíveis, tal como vemos Catarina a justificar (figura 2) por que razão não é possível partir de um polígono com um número ímpar de lados.

Uma outra característica do *Geogebra* é levar-nos a trabalhar com os conceitos formais associados às suas ferramentas. Podemos pensar que só é possível tirar partido do AGD quando se opera ao nível da estruturação geométrica, ou seja, quando já se dominam os conceitos e, de facto, como refere Battista (2007), não é possível fazer as construções geométricas sem ter atingido algum nível de "explicitação conceptual e representacional". No entanto, estes dados mostram que o *Geogebra* pode favorecer a transição da estruturação espacial para a geométrica. Finalmente, em ligação à natureza aberta da tarefa que promove diferentes resoluções, o *Geogebra* apoia esta diversidade através do conjunto de ferramentas que disponibiliza, o que é também um estímulo à criatividade, tal como refere Francisco:

> A escolha desta tarefa incidiu no facto desta nos dar liberdade, com a ajuda visual do *Geogebra*, para construirmos as figuras a partir de processos distintos. Estes processos dependem da nossa capacidade de imaginar sobreposição de figuras geométricas, linhas orientadoras na construção (retas, semirretas, etc.) e outros pontos indispensáveis da figura final (estrela) ... melhora a capacidade de encontrar relações entre figuras e os seus elementos de construção (dependendo do processo) e estimula a criatividade no processo em si. (Portefólio)

Concluindo, este trabalho confirma as afirmações de King e Shattschneider (2003) no que respeita às razões que apoiam a utilização dos AGD, particularmente no que respeita a tirar partido do rigor e promover a visualização, exploração, investigação, descoberta e demonstração, ao que acrescento a criatividade e a intuição. Além disso, as resoluções apresentadas evidenciam ainda que a realização de construções no *Geogebra* contribui para a estruturação espacial e geométrica. De facto, tal como dizem Fujita e Jones (2002), é necessário treinar o "olho geométrico", ou seja, a capacidade de destacar as propriedades das figuras, algo que foi central na atividade realizada e claramente favorecido pelo AGD.

Notas

[1] Algumas figuras foram reproduzidas para este artigo, por forma a garantir a sua legibilidade. As resoluções apresentadas correspondem a excertos das resoluções originais de forma a ilustrar os métodos utilizados.

[2] Este artigo foi escrito a partir de uma comunicação apresentada no Encontro de Investigação em Educação Matemática, com a referência Brunheira, L. & Ponte, J. P. (2016). Realizar construções geométricas com o Geogebra, o contributo do AGD para a estruturação geométrica. In A. P. Canavarro, A. Borralho, J. Brocardo & L. Santos (Eds.), *Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 341-353). Évora: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Referências

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry microworld. In G. W. Blume & M. K. Heide (Eds.) *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, Vol. 2: Cases and Perspectives* (pp. 131-156). Greenwich, CT: Information Age.

Fujita, T., & Jones, K. (2002). The bridge between practical and deductive geometry: Developing the "geometrical eye". In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 384-391), Norwich, UK.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (Eds.). (2005). *Developing thinking in geometry*. London: Sage.

King, J. R., & Schattschneider, D. (2003). Tornar a geometria dinâmica. In E. Veloso & N. Candeias (Eds.), *Geometria dinâmica: Seleção de textos do livro Geometry Turned on!* (pp. 7-13). Lisboa: APM.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 283-317.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). Princípios e *Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Vale, I. (2015). A criatividade nas (re)soluções visuais de problemas. *Educação e Matemática 135*, 9-15.

Lina Brunheira
Escola Superior de Educação de Lisboa