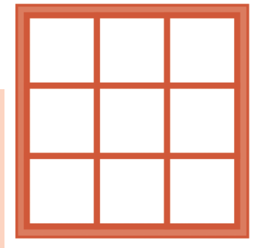
Quadrado multiplicativo



Num quadrado de 3×3, colocar nove números naturais diferentes de modo que:

— os três produtos horizontais e os três produtos verticais sejam todos iguais,

— o maior dos números seja o menor possível.

(Respostas até 31 de dezembro, para zepaulo46@gmail.com*)*

FRAÇÕES HARMÓNICAS

O problema proposto no número 136 de *Educação e Matemática* foi o seguinte:

Uma das séries mais famosas é a harmónica:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

A série, embora cresça cada vez mais lentamente, é divergente, isto é, ultrapassa qualquer valor que se queira e o seu limite é +∞.

Vamos usar apenas alguns elementos desta série, não obrigatoriamente consecutivos, de modo que a sua soma seja exatamente igual a 3.

Qual é o número mínimo de frações que temos de usar?

Recebemos dez respostas: Alberto Canelas (Queluz), Carlos Dias, Graça Braga da Cruz (Ovar), Graciano Martins & Alice Martins (Torres Novas), Mário Roque (Guimarães), Laura Almeida, Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), da turma do 11ºB da Escola Básica e Secundária Artur Gonçalves (Torres Novas), de um grupo de professores da Escola Básica Carlos Gargaté (Charneca da Caparica), e de outro grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo (Paião): Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Não é fácil arranjar uma estratégia eficiente para abordar este problema.

O Mário começou por constatar:

Sendo $u_n=\frac{1}{n}$ *decrescente, a soma dos seus primeiros 10 termos inferior a 3 e a soma dos seus primeiros 11 termos superior a 3, o número mínimo de frações a usar não poderá ser inferior a 11…*

A Graça e a Laura partiram deste resultado:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

para obter algumas somas que podem ser úteis:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{20}=\frac{1}{4},\quad \frac{1}{6}+\frac{1}{30}=\frac{1}{5},$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{8}+\frac{1}{56}=\frac{1}{7},\ \text{etc.}$$

Para os professores da Escola da Charneca da Caparica, *o grande problema desta soma prende-se com as dízimas infinitas. No entanto, com alguma paciência conseguimos "complementá-las"*:

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{140}=\frac{3}{20}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{72}=\frac{1}{8}\quad\text{ou}\quad\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}=\frac{1}{4}.$$

Pedrosa Santos partiu de um resultado conhecido: *a soma dos inversos dos divisores dos números perfeitos (6, 28, 496, …) é sempre igual a 2*, completando com frações não utilizadas antes, enquanto o Carlos usou apenas a soma dos inversos dos divisores de 120. Com isto, chegaram à soma 3 usando 15 e 16 frações, respetivamente.

Todos os restantes leitores encontraram soluções com 13 parcelas. Apareceram várias demonstrações de que, com onze, é impossível, mas nenhuma para doze.

A resolução mais interessante será a de Graciano Martins & Alice Martins, não só por ser aquela que usa o conjunto mais "baixo" de denominadores (o maior deles é 28), mas também por seguir uma estratégia muito curiosa, como se pode verificar a seguir.

Usar denominadores que produzam dízimas finitas:

A) $1 + 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/8 = 2{,}075$

Usar dízimas infinitas cuja soma produza dízimas finitas com denominadores múltiplos de 3:

B) $1/3 + 1/6 = 0{,}5$

C) $1/9 + 1/12 + 1/18 = 0{,}25$

Idem, com denominadores múltiplos de 7:

D) $1/7 + 1/14 + 1/28 = 0{,}25$

Conjugando estes quatro resultados, a soma é 3,075

Retirando 1/8, fica 2,95.

Juntando 1/20 obtém-se 3:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{14}+\frac{1}{18}+\frac{1}{20}+\frac{1}{28}=3$$

Exposições

A APM tem 11 Exposições interativas/itinerantes que cede às escolas, mediante o pagamento de uma certa quantia. Essa cedência é feita por um período máximo de três semanas e as escolas interessadas, deverão enviar o seu pedido por e-mail.
Para conhecer as Exposições, visite o nosso site, onde disponibilizamos descrições e imagens dos vários módulos, permitindo assim planear o seu aproveitamento didático.

- Jogos do Mundo
- Matemática e Natureza
- Escher
- Aventura Matemática
- À Medida do Tempo
- A Matemática é de Todos
- Polya
- Sempre Houve Problemas
- Livros de Texto
- A Festa da Água
- José Sebastião e Silva