O PROBLEMA DO PROFMAT 2016

O concurso apresentado aos participantes no ProfMat 2016 consistiu na resolução do problema "Onze elementos num conjunto":

Um conjunto de números naturais, todos diferentes, tem onze elementos e a sua média é um número inteiro.

Seja M o maior desses números.

O conjunto é especial porque é possível eliminar um dos números e a média continuar inteira, eliminar um segundo número e a média manter-se inteira. E assim sucessivamente. Podemos ir eliminando os números um a um até ao fim, conseguindo sempre que a média dos que vão sobrando seja inteira.

Qual é o conjunto em que o M é o menor possível?

Os critérios de classificação eram resposta correta e bem justificada, ausência de erros, simplicidade e clareza.

Foram-nos entregues 15 resoluções (11 individuais e 4 em grupo).

Vários concorrentes começaram por testar a hipótese de os elementos do conjunto serem os primeiros onze números naturais, cuja soma é 66, um múltiplo de 11. Para retirar um elemento e a média ser inteira, é preciso que a soma dos que ficam seja múltipla de 10 e por isso só é possível eliminar o 6 (a soma dos restantes é 60). Só que a seguir, para nove elementos, era preciso tirar o 6 (que já saiu) ou o 15 (que não faz parte do conjunto). Impossível.

Então, os onze números somarão pelo menos 77.

Só a Filipa seguiu a ordem sugerida no enunciado. Imaginou um conjunto com onze números desconhecidos em que a sua soma é 77. Depois foi descobrindo que elementos lá teriam de estar, testando todas as possibilidades. O trabalho foi enorme mas chegou à solução.

Quase todas as outras resoluções construíram o conjunto do fim para o princípio, isto é, começando apenas com um elemento e acrescentando um novo número natural de cada vez, até chegar aos onze elementos. O novo elemento a acrescentar em cada etapa deve ser o menor possível e garantindo sempre que a média se mantém inteira.
A sequência de passos é a que se mostra no quadro seguinte.

N	Conjunto	Soma	Média
1	{1}	1	1
2	{1,3}	4	2
3	{1,3,2}	6	2
4	{1,3,2,6}	12	3
5	{1,3,2,6,8}	20	4
6	{1,3,2,6,8,4}	24	4
7	{1,3,2,6,8,4,11}	35	5
8	{1,3,2,6,8,4,11,5}	40	5
9	{1,3,2,6,8,4,11,5,14}	54	6
10	{1,3,2,6,8,4,11,5,14,16}	70	7
11	{1,3,2,6,8,4,11,5,14,16,7}	77	7

Logo, M=16.

A maioria dos concorrentes ficou por aqui, mas era preciso mostrar mais qualquer coisa: que M não pode ser inferior a 16. Foi o que fizeram o Fausto e o grupo de Guimarães. Demos a palavra ao Fausto:

> *Mas calma lá...*
> *Existem muitos conjuntos de números naturais, todos diferentes, em que a soma é 77 e o maior deles é inferior a 16.*
> *(...) Então, retiramos o 7 para dar 70 (e ser divisível por 10). Depois, era necessário retirar o 7 (que já lá não está) ou o 16 (que não faz parte do conjunto).*
> *Nota: caso o 7 não fizesse parte destes conjuntos, nem conseguíamos o passo anterior porque seria necessário retirar 17 para a média ser inteira com os dez elementos restantes.*

Conclusão, o conjunto é {1,2,3,4 5,6,7,8,11,14,16}, com M=16.

PREMIADOS E PRÉMIOS

1º (*Unidade TI-Nspire Cx, oferta Texas Instruments*)
- Fausto Barros Silva

2º *(Jogo "Dominó Triangular")*
- Célia Lobo, Manuel Lage, Mário Roque (Guimarães)

3º *(Livro "Desafios", J. P. Viana)*
- Filipa Freire

Os prémios devem ser levantados até 31 de Dezembro de 2016. Por favor, contactar a sede da APM em Lisboa (socio@apm.pt *ou* 217163690*)*.

Outros concorrentes – Ana Paula Jardim, Carolina Moreira, Catarina Ferreira, Helena Almeida, Luís Bernardino, Luís Reis, Paula Barros, Pedro Alves, Rafaela Martins, e os grupos: Catarina Gonçalves & Marta Ascenção; Grupo Camões (Adelina Precatado, Anabela Teixeira, Pilar Mansos, Teresa Moreira, Tiago Teo & João Jaime Pires); Sandra, Sofia & Daniel Castanho.

O PROBLEMA DO PROFMAT 2015
José Paulo Viana