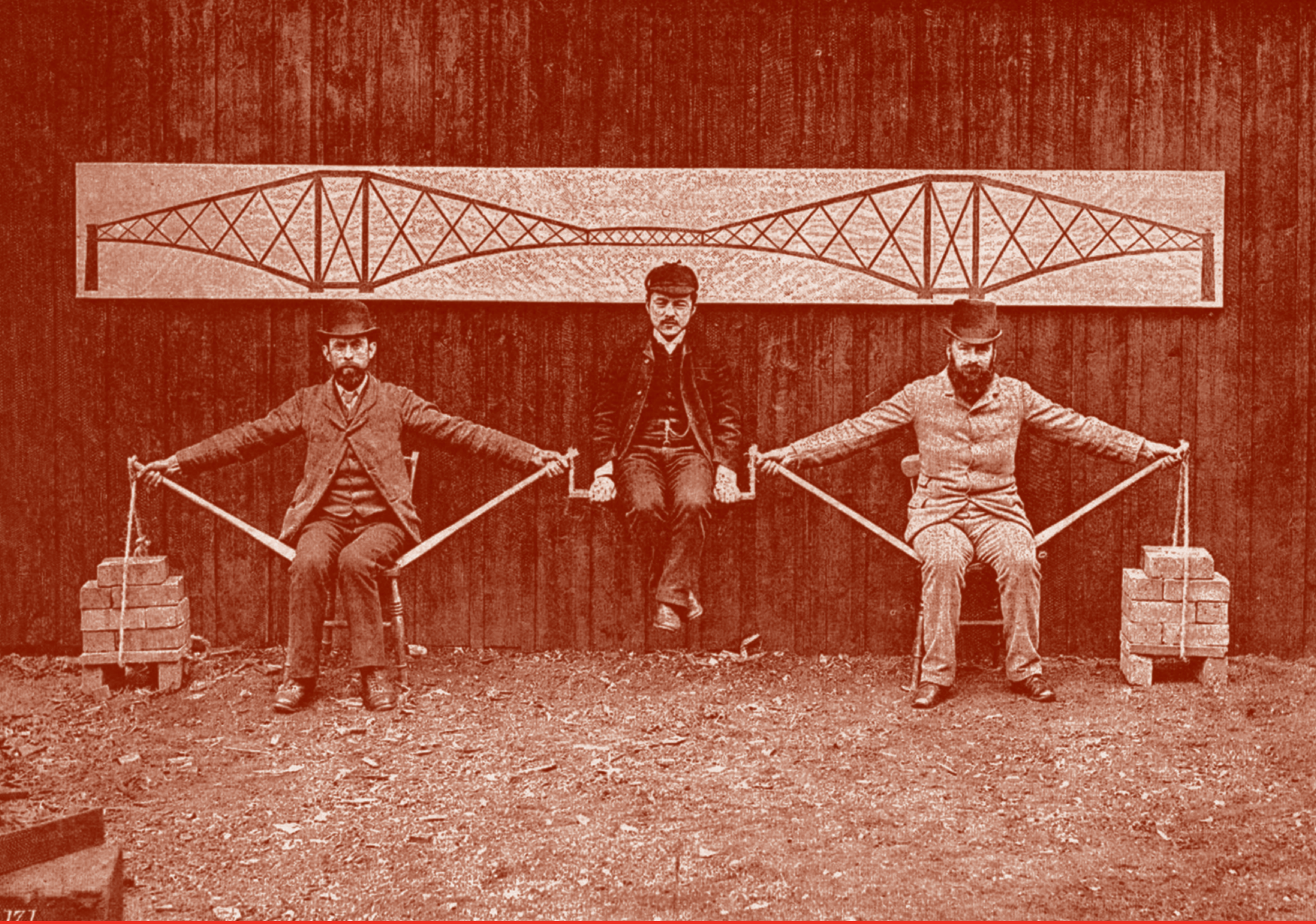

Para além de Eureka: a demonstração em Matemática

António M. Fernandes

Este artigo constitui uma extensão de uma conferência proferida no ProfMat2016 sob o mesmo título. O objectivo da conferência (e do artigo) é o de identificar o papel da demonstração na metodologia matemática, de a caracterizar e, por fim, discutir a sua relevância num contexto pedagógico. Importa desde já notar o óbvio: quaisquer considerações sobre estes temas não são relevantes senão relativamente a uma certa concepção do Ensino, da sua função e do respectivo método.

De modo a tornar úteis as considerações que aqui farei, e sabendo que quaisquer considerações reflectirão inevitavelmente um certo compromisso filosófico, tentarei restringir-me aos aspectos mais objectivos que possam servir de ponto de partida a um qualquer posicionamento mais particular.

As origens

Não é possível, de um ponto de vista historiográfico, identificar *Matemática* com *demonstração*. Seguramente, as primeiras considerações matemáticas não foram do tipo dedutivo, tampouco este corpo evolutivo de conhecimento matemático se foi edificando alicerçado em demonstrações.

Correndo o risco de alguma especulação, pode dizer-se que o primeiro artefacto matemático conhecido foi produzido no Paleolítico Superior, mais precisamente, cerca de 20 000 a.C. Trata-se do *osso de Ishango*, contendo uma série de entalhes que sugerem a possibilidade de se tratar de um instrumento de contagem.[1]

Avançando 15 000 anos, já é possível considerar exemplos de um conhecimento matemático não negligenciável, primeiro entre os *Sumérios* e posteriormente entre os *Babilónios*.[2]

A civilização egípcia revela-se igualmente uma produtora de conhecimento matemático: o *papiro de Rhind*, escrito cerca de 1650 a.C., consiste numa espécie de manual de aritmética e geometria. Embora não contenha demonstrações de factos matemáticos revela um grande conhecimento acerca dos algoritmos aritméticos, números compostos e números primos, médias geométricas e harmónicas bem como, conhecimento acerca da resolução de certos tipos simples de equações.

Ambos os casos indicam a existência de uma actividade matemática criativa mas não dedutiva.

O salto conceptual necessário à transformação da Matemática numa actividade dedutiva foi dado pelos gregos. Isso começou a acontecer, muito provavelmente, logo a partir de Tales de Mileto (c. 624 a.C.–c. 546 a.C), de quem se diz ter estado na origem da filosofia especulativa. Quando Euclides (fl. 300 a.C.) escreve os seus *Elementos* já a noção de demonstração ocupa nos trabalhos matemáticos, neste em particular, um lugar central.

Para Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) o conhecimento é dedutivo, i.e. obtém-se através da demonstração (*apodeixis*) possuindo uma forma bem determinada: a inferência silogística. Deste modo a demonstração assenta firmemente num formalismo lógico: a lógica silogística. Dado que a estrutura de um silogismo é reconhecível de forma objectiva, a demonstração assegura, de modo absoluto, que a verdade se transmite das hipóteses às conclusões.

Contudo, qualquer sistema dedutivo necessita de um ponto de partida, obtido através da incorporação de primeiros princípios (*archê*), princípios estes, indemonstráveis. Aristóteles sabia-o bem e nos *Analíticos Posteriores* tenta caracterizar o processo através do qual estes primeiros princípios são isolados (um processo mental envolvendo percepção sensorial, memória e experiência).

O silogismo (na realidade algumas formas silogísticas) são, por assim dizer, arquétipos formais de um argumento ideal. Contudo, a importância teórica que lhe é conferida por Aristóteles não tem correspondência na sua própria prática. Mesmo os *Elementos*, não contêm um único argumento silogístico. Isto, apesar de estruturalmente, constituírem um edifício axiomático-dedutivo nos termos descritos por Aristóteles.

Claro que a natureza da própria lógica aristotélica, que não é uma lógica proposicional como aquela que hoje usamos, levanta dificuldades à redução de argumentos, ainda que válidos, à forma silogística. Muito naturalmente, os argumentos eram preferencialmente descritos numa outra forma, mais natural. Contudo, é possível que tal como hoje a sua validação correspondesse ao reconhecimento mais ou menos intuitivo de que, em cada caso, uma tal redução era possível.

A lógica como hoje a conhecemos é uma evolução operada a partir da lógica aristotélica e, ainda mais directamente, operada a partir da lógica dos estóicos (essa sim uma lógica proposicional). Paralelamente, a noção de *demonstração*, também ela sofreu uma evolução.

Permanecem, apesar destas mudanças, os objectivos fundamentais enunciados em Aristóteles: assegurar de forma absolutamente correcta a transmissão da verdade.[3]

A demonstração e o seu papel em Matemática

A Matemática constitui um domínio do conhecimento que é peculiar e em larga medida singular. A natureza de cada um dos seus objectos, independentemente do seu estatuto ontológico, é altamente abstracto e a Matemática identificada com o seu método só é possível graças a este facto.

O início do século 20 foi marcado por grandes esforços fundacionais. Uma das preocupações de Hilbert era fornecer uma demonstração finitária da *consistência da Matemática*. Entre as componentes essenciais à realização de um tal propósito, ocupando um lugar central, surgia o *método axiomático* e, em particular, a noção de *demonstração*. De acordo com o próprio Hilbert uma demonstração (formal) de uma proposição φ consiste numa sequência finita de proposições $\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle$ onde $\xi_n = \varphi$ e cada ξ_i ou é um axioma lógico ou então resulta da aplicação de uma *regra dedutiva* a proposições que precedem ξ_i na sequência.[4]

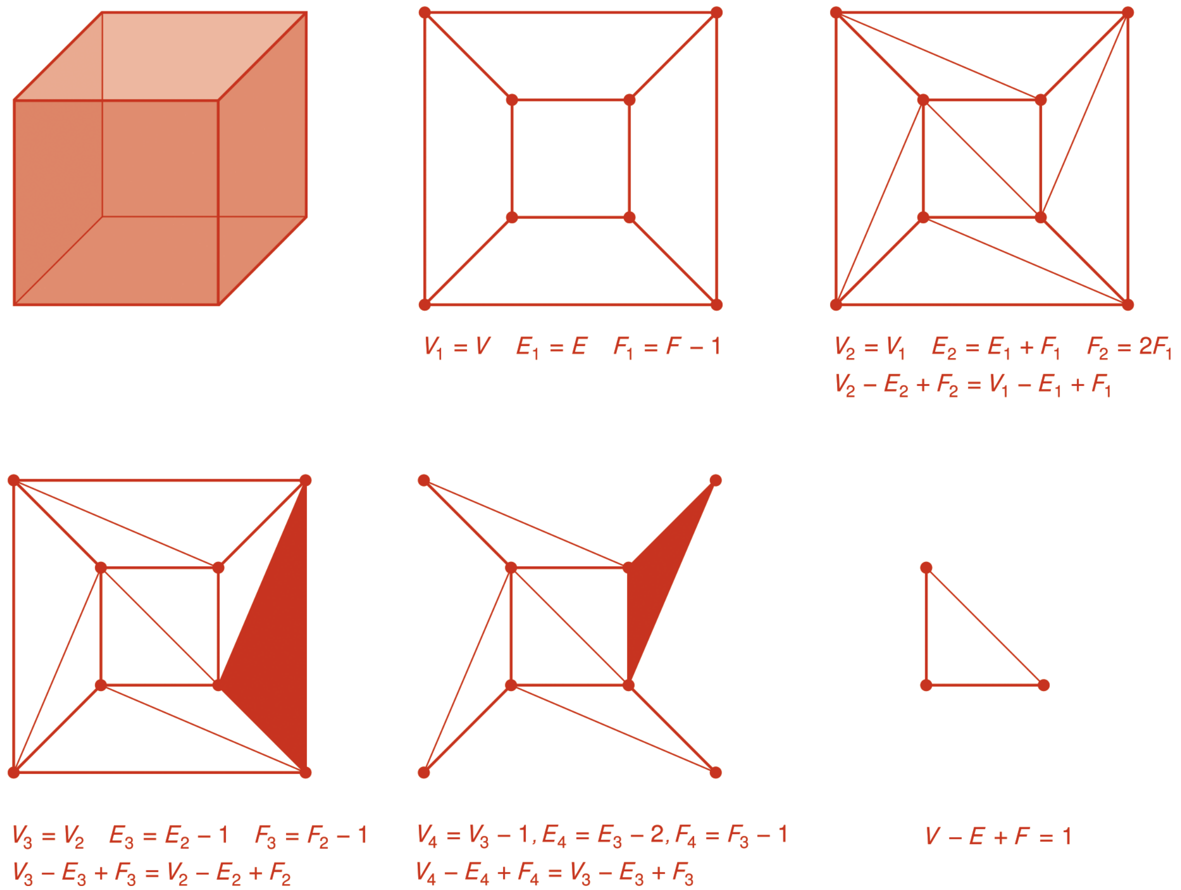

Figura 1. A construção de Cauchy no caso de um cubo

Se Γ é um conjunto de axiomas e se existe uma demonstração de φ que recorre aos axiomas de Γ escrevemos $\Gamma \vdash \varphi$ (e dizemos que Γ *demonstra* φ).

Desde que as proposições sejam expressas numa inguagem formal, a verificação de que uma dada sequência $\langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \rangle$ é uma demonstração de ξ_n constitui um procedimento mecânico, ausente de qualquer tipo de subjectividade.

Estamos perante uma noção moderna que, embora permita encarar as demonstrações como objectos matemáticos, exclui desta categoria argumentos baseados em construções e procedimentos como o são todas as construções com régua e compasso que surgem nos *Elementos* de Euclides, ou como a famosa *demonstração* que Cauchy forneceu para a igualdade de Euler (supostamente válida para todos os poliedros): $V - E + F = 2$ onde (V é o número de vértices, E é o número de arestas e F é o número de faces). A *demonstração* de Cauchy consiste num procedimento[5] que visa reduzir o poliedro original a um objecto mais simples onde a verificação da igualdade é trivial. O procedimento é tal que a relação se conserva ao longo do processo. Consiste no seguinte: (1) remover uma das faces e projectar a figura resultante no plano (na figura projectada, o número de faces (projectadas) decresce uma unidade, i.e., $V_1 = V$, $E_1 = E$ e $F_1 = F - 1$); (2) Triangular cada face; (3) Remover os triângulos um a um até restar apenas um triângulo. (O valor da expressão $V - E + F$ permanece inalterado desde a figura projectada até ao triângulo final e, neste último caso é fácil determinar o seu valor que é 1.) Como na figura projectada o número de faces é menos uma unidade que no poliedro, mantendo-se V e E inalterados, tem-se $V - E + F = 2$ para o poliedro. Na figura 1 descrevem-se graficamente as diferentes etapas deste processo, tomando um cubo como ponto de partida.[6]

É fácil verificar que este tipo de argumento não passa no crivo de Hilbert e por diversas razões. Desde logo não é um argumento estritamente lógico, ele depende de uma certa intuição visual que evidentemente se encontra confinada à informação proporcionada por um número limitado de visualizações, incompatível com a universalidade do resultado.

Devido à sua génese uma prova no sentido de Hilbert não possui lacunas. Neste caso elas abundam, não é claro que este tipo de procedimento possa ser feito conduzido em todos os casos nem que, sendo possível com diferentes opções, elas conduzam a um mesmo desfecho.

Finalmente a demonstração de uma proposição nos termos de Hilbert corresponde a um objecto definitivo. Neste caso estamos perante uma receita que deve ser aplicada a cada caso particular para produzir uma demonstração concreta para esse caso. De qualquer forma, é humanamente impossível, a menos que se recorra a um certo tipo de generalização, verificar uma quantidade infinita de casos.

Num ensaio, em 1945, C. G. Hempel[7] afirmava que «o método da Matemática é a demonstração». Ainda que, como o próprio reconhecia, «os sistemas matemáticos assentam em axiomas que, em si mesmos, não se podem justificar através da dedução.»

Tomada à letra, esta opinião, conjugada com a concepção hilbertiana de *demonstração*, desqualificaria uma parte muito significativa da Matemática produzida até ao século 20. De resto, nem Hempel nem ninguém que reconheça o papel decisivo da demonstração na metodologia matemática, poderá sustentar uma tão radical concepção. Para continuar a mencionar Hempel, no seu *Philosophy of Natural Science* (1966), ele conclui que a dedução não pode ser o único método da Matemática: a dedução permite verificar a validade de um argumento nas não fornece meios para o encontrar, tampouco fornece uma forma de identificar as proposições que são interessantes ou relevantes para o desenvolvimento de um certo domínio matemático.

Uma demonstração é pois um *dispositivo* que permite assegurar de forma segura que a verdade se propaga das premissas às conclusões e, deste ponto de vista, a demonstração hilbertiana constitui um paradigma da capacidade de assegurar essa segurança. De qualquer forma, o simples exercício de consultar a literatura matemática, revelará que nelas não se encontram demonstrações formais (excepção óbvia quando o tema é a Lógica Matemática, onde estas demonstrações são tratadas como objectos matemáticos, para serem estudados matematicamente). As razões para este facto são várias. Em muitos casos, a formalização estrita de uma proposição matemática seria impossível na prática e, mesmo que essa formalização pudesse ser terminada, a quantidade de símbolos envolvida seria de tal forma grande que os recursos necessários para a sua validação não estariam disponíveis. Por outro lado, uma vez que as demonstrações são interpretadas por humanos, são habitualmente descritas numa linguagem que é um melhor canal entre as ideias envolvidas e o cérebro. Claro está que a estrutura de uma demonstração à Hilbert, sobretudo a concepção segundo a qual em cada etapa as novas proposições são acrescentadas, exclusivamente através da utilização de regras lógicas deve ser respeitada. De facto, uma demonstração informal (i.e., não descrita em termos de uma linguagem formal) é válida na medida em que a cadeia de inferências não fica comprometida do ponto de vista lógico.

A demonstração é assim uma verificação eficiente e esse é o seu único papel. Não deixa por isso de ser essencial: a actividade matemática tem como objectivo demonstrar resultados matemáticos. Mas a actividade matemática não se resume, evidentemente, ao cumprimento desse objectivo. Em particular, uma demonstração não é, em geral, em si mesma, fonte de entendimento. No entanto, sem ela esse entendimento não existiria. A existência de uma demonstração legitima a consideração de certos modelos (necessariamente objectos particulares) e passamos entender o fenómeno geral através da análise desses modelos concretos.[8]

Aspectos pedagógicos

Devem ensinar-se demonstrações? A resposta a esta questão depende dos objectivos do ensino da Matemática. Se esse ensino corresponder de algum modo a um apetrechamento, capaz de dotar o indivíduo de ferramentas que lhe proporcionem a resolução de problemas práticos então, diria que o ensino da demonstração pode (talvez até deva) ser dispensado. Contudo, se existe na actividade matemática capacidade para promover certo tipo de desenvolvimento cognitivo que, tendo em conta o carácter peculiar da Matemática, se promoveria necessariamente através dessa actividade então, devem ensinar-se demonstrações.

Plutarco defendeu a ideia de que «a educação é como o atear de uma chama e não como o encher de um vaso». Concordo com ele em absoluto. E é por isso que não posso deixar de me inquietar com o facto de o ensino da demonstração poder constituir um desastre, como certamente o configuraria a sua redução a um mero exercício de reprodução acrítica. É importante não perder de vista que aquilo que pode ser importante do ponto de vista pedagógico não é a demonstração *per se*, mas antes a actividade de demonstrar. (Parece-me claro que *investigar para demonstrar* constitui uma actividade mais rica do ponto de vista cognitivo que o *investigar para utilizar* ou o ainda mais pobre *aprender a usar*.)

A demonstração corresponde ao culminar de um processo que é, como já se referiu, do ponto de vista cogni-

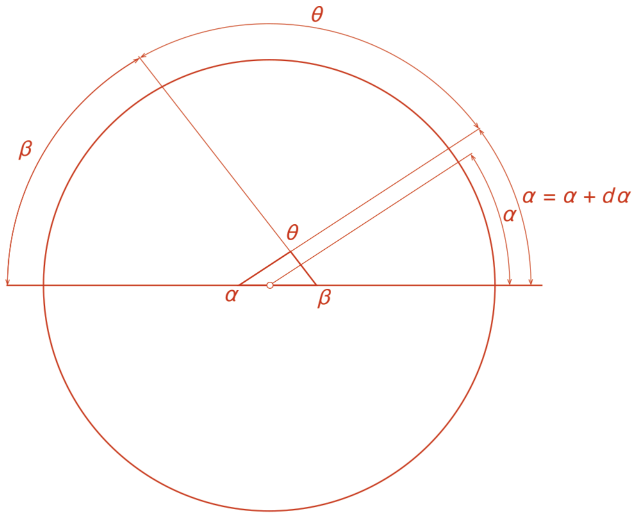

Figura 2

tivo, riquíssimo. Não apenas por envolver raciocínio lógico-matemático intenso, mas também por ser um processo criativo e imaginativo. É ainda um processo dinâmico, onde frequentemente não apenas as abordagens e estratégias mudam mas, também, os próprios conceitos são re-inventados e as noções fundamentais afinadas, ou até substituídas. Existe toda uma lógica da descoberta que não coincide com a lógica da transmissão da verdade, mas que tal como esta, vale a pena conhecer e interiorizar.

À primeira vista pode parecer estranho que a Matemática se possa desenvolver sem uma adesão estrita ao rigor lógico. Em última análise não pode. Mas, percorrendo, ainda que superficialmente, a história da Matemática, constatam-se largos períodos de actividade em que esse rigor foi relegado para um plano secundário. Foram (e serão) períodos de grande criatividade, impulsionados sobretudo pela força das ideias, impondo-se sobre as nossas mentes. Antes da *análise rigorosa* proporcionada pelo cálculo $\epsilon - \delta$ de Cauchy, o cálculo diferencial e integral já tinha sido enormemente desenvolvido pelos impulsionadores do cálculo infinitesimal.[9] Os infinitesimais surgem misturados com os números ordinários, mas as suas propriedades correspondem mais a um certo tipo de intuição que às leis de uma álgebra rigorosamente estabelecida: se dx e dy são infinitesimais, então $dx = dy = 0$ contudo, dx/dy pode ser um número inclusive não nulo e diferente de 1. Usando este tipo de especulação, sempre que a é um número ordinário e dx é um infinitesimal tem-se $a + dx = a$. Posto isto, é fácil concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo infinitesimal é π (ver a figura 2). Explorando este facto e, contraindo continuamente um triângulo arbitrário até obter um triângulo infinitesimal, Schumacher estabelecia que para qualquer triângulo, a soma dos respectivos ângulos internos é π (figura 3). Este exemplo corresponde, evidentemente, a uma utilização não essencial destas ideias, uma vez que este resultado já surge demonstrado nos *Elementos*. Apesar disso, serve para ilustrar a elegância dos argumentos. É claro que, o rigor é outra coisa.

O facto é que absoluto rigor e criatividade nem sempre caminharam lado a lado, mesmo em Matemática. E, num processo que conduz à demonstração de um resultado matemático, existem períodos criativos, imaginativos, e especulativos, eventualmente menos rigorosos, como é típico das actividades exploratórias em território desconhecido.

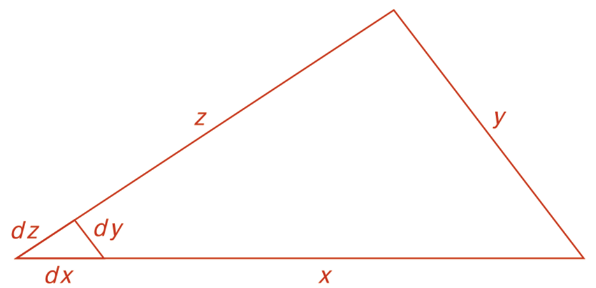

Figura 3

Mas é precisamente esta actividade que permite identificar aquelas relações e propriedades que persistem na observação de um fenómeno, e cuja articulação haverá de constituir o esboço que culminará numa verdadeira demonstração. É este tipo de actividade que o *ensino da demonstração* deve aperfeiçoar em cada aluno.

Como se imagina, um processo deste tipo não corresponde a um percurso pré-determinado, muito menos será útil condicioná-lo excessivamente. Requer por isso tempo. Seguramente muito mais tempo que aquele que os actuais currículos proporcionam. Por outro lado, é preciso ter em conta que a necessidade de uma demonstração não se impõe facilmente a um qualquer espírito. A grande maioria das pessoas estará disposta a confiar num grau de evidência suficiente, ou em soluções empíricas satisfatórias que, evidentemente não contribuem nada para a compreensão de um dado fenómeno.

Existe, portanto, uma segunda dificuldade que importa considerar: a de estimular a necessidade de demonstrar. Perante problemas que em muitos casos terão que ser simples será necessário que, estrategicamente, se *enfraqueça* a evidência, algo que só será possível através da habilidosa introdução de uma certa *tensão cognitiva*.

Já se vê que fica reservado ao professor um papel essencial, papel esse que não poderá desempenhar satisfatoriamente sem que possua um profundo conhecimento da génese das noções envolvidas, por um lado, e uma capacidade para gerir toda a dinâmica deste processo exploratório, por outro.

Um ensino significativo da demonstração, necessita de condições que não estão criadas. Os próprios moldes em que deve ocorrer exigem, antes de serem implementados, uma profunda reflexão multidisciplinar. A este respeito, nenhuma decisão irreflectida ou simplista poderá ser benéfica e é, por isso, mais prudente seguir o conselho de Victor Hugo: «A linha recta é uma respeitável ilusão de óptica que conduziu muitos Homens à desgraça.»[10]

Notas

1 Vladimir Pletser, sugere até que o instrumento revela conhecimentos de representação na base 12 e nas *subbases* 3 e 4. (Ver: *Does the Ishango bone indicate knowledge of the base 12? An interpretation of a prehistoric discovery, the first mathematical tool of humankind*, http://arxiv.org/pdf/1204.1019.pdf)

2 Para vários exemplos muito significativos ver: Jöran Friberg. *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts—Manuscripts in the Scøyen Collection*, Springer, 2007.

3 Esta ideia do *rigor absoluto* tem sido contestada. A contestação é justa se dirigida a uma interpretação rígida da expressão *rigor absoluto*. Diremos mais acerca desta questão na secção seguinte.

4 Uma *regra dedutiva* pode ser vista como um tipo de *operação* que associa a uma sequência $\langle\theta_1,\ldots,\theta_k\rangle$ de proposições (as premissas) uma proposição θ (a conclusão). Podemos enunciar a regra da seguinte forma: $\theta_1,\ldots,\theta_k \vdash \theta$. Um exemplo consiste na regra de *modus ponens* que, tendo em conta a observação precedente se pode escrever $\phi, \phi \Rightarrow \psi \vdash \psi$.

5 Lakatos descreve-a como uma experiência mental. (Ver: Imre Lakatos. *Proofs and Refutations—The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, 1976.)

6 De facto o argumento não é válido em geral. Para uma análise histórico-filosófica da história da relação de Euler ver Imre Lakatos *op. cit*.

7 Carl Gustav Hempel (1905–1997) foi um filósofo alemão e figura proeminente num movimento da Filosofia da Ciência designado de *Empiricismo Lógico*.

8. A natureza não explicativa das demonstrações matemáticas está na origem de um debate importante acerca da certeza do conhecimento matemático que ocorrido no século 17, a famosa *Quaestio de certitudine mathematicarum*. A questão tem origem numa distinção que passou a ter alguma proeminência, (sobretudo a partir de Averroes) entre dois tipos de demonstração silogística, respectivamente a *demonstratio quia* (demonstração do facto) e a *demonstratio propter quid* (demonstração das razões para o facto) e, ainda a *demonstratio potissima*. No primeiro caso a causa é inferida a partir do efeito, no segundo é o efeito que se infere a partir da causa. A demonstratio potissima é um combinação das duas, isto é, o termo médio que relaciona a hipótese e a conclusão deve descrever a causa próxima do efeito de modo essencialmente único (algo que, deve dizer-se, não fazia sentido na concepção aristotélica).
A visão segundo a qual a Matemática constitui a forma mais perfeita de conhecimento, com base na ideia de que recorria à forma mais poderosa de demonstração foi contestada por Alessandro Piccolomini (1508–1578) que defendeu a tese segundo a qual as demonstrações em Matemática não podem ser *potissimae*. (Piccolomini defendeu simultaneamente a ideia de que o conhecimento matemático era do tipo mais certo, devido à natureza dos seus objectos.)
Por exemplo, a demonstração que consta dos Elementos de Euclides de que a soma dos ângulos internos de um triângulo corresponde a dois ângulos rectos, assenta numa construção geométrica em que certos lados são prolongados, estes prolongamentos dificilmente podem ser visto como a causa essencial da conclusão, antes pelo contrário constituem um mero acidente a partir do qual, no entanto, a conclusão pode ser derivada. Ainda assim constituem uma causa remota, pelo que a demonstração não pode ser considerada *potissima*.
Deve referir-se que esta polémica adquiriu grande importância tendo tido ecos em Portugal, onde foi alvo da atenção dos Conimbricenses.

9 Note-se que nem mesmo Cauchy, que finalmente colocou a *análise* a salvo das críticas do bispo Berkeley, abandonou o poder heurístico dos infinitesimais. A simples leitura do seu *Cours d'analyse*, revelará as inúmeras ocasiões em que os infinitesimais desempenham um papel significativo na sua argumentação.

10 Victor Hugo, *Os Miseráveis*.

António M. Fernandes
Dep. de Matemática, IST-UL
amfern@math.tecnico.ul.pt