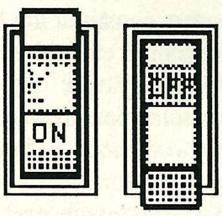
Alguns *'sim'*, *'mas'* e *'talvez'*, a propósito do ensino das funções

- começo de um debate? -

A propósito do artigo 'O conceito de função no currículo de Matemática' ,da autoria de João Pedro da Ponte, publicado no número anterior de Educação e Matemática, *Eduardo Veloso escreveu uns* 'sins' *e alguns* 'mas'. *João Pedro da Ponte leu e retorquiu. Publicamos a seguir o que ambos nos fizeram chegar. Iniciar-se-á, desta maneira, um debate mais alargado a este propósito? Talvez...*



Sim, sim, mas...

Eduardo Veloso

Do último número de Educação e Matemática, dedicado às funções, permito-me destacar o artigo de J. Pedro Ponte, intitulado "O conceito de função no currículo de Matemática". Deste importante e estimulante artigo uma parte é dedicada precisamente às "funções no currículo de Matemática" e é a este respeito que gostaria de fazer alguns comentários — correspondentes ao "sim,sim" do título desta nota — e acrescentar algumas observações — correspondentes estas ao "mas"...

Vejamos primeiro o "sim, sim". Passei alguns meses da minha vida, no período militante da Matemática Moderna (MM), a tentar explicar aos tele-espectadores portugueses (quantos?), no horário nobre das sete da tarde, durante meia hora, o conceito de função *como devia ser* — "são dados dois conjuntos A e B, e uma lei..." ou, ainda melhor, "consideremos um subconjunto do produto cartesiano AxB verificando a condição..." — e dando em seguida os clássicos exemplos das funções *pai*, *avô paterno*, etc.. Reconheço hoje que *nesse aspecto*, e certamente noutros, as orientações da MM estavam erradas. Foi sobretudo completamente irresponsável e absurda a generalização e "trivialização", como lhe chama J. Pedro Ponte, que se seguiu a esses tempos pioneiros, quando as *bolinhas e setas*, erigidas em esquema absoluto, invadiram todos os níveis de ensino desde o primário. Acredito hoje que a *base concreta* a partir da qual devemos *começar* a ajudar cada aluno a ir construindo o conceito de função deverá ser constituída pelas funções numéricas.

A experiência que já temos, no projecto MAT_{789} — ver Leonor Cunha Leal, *Funções no terceiro ciclo do ensino básico- uma possível abordagem*, no mesmo número da revista — confirma também grande parte das linhas de orientação apontadas por J. Pedro Ponte — nomeadamente a importância dos aspectos quantitativos, da construção de tabelas, da aquisição da sensibilidade quanto às aproximações e da articulação permanente entre as várias representações (numérica, gráfica, analítica), com o estudo analítico "a surgir com base em actividades sistematicamente feitas a partir das representações numérica e gráfica". Portanto, até aqui, muitos "sim"...

Vejamos agora o "mas...". Considero que pelo menos dois aspectos do problema "funções no currículo" merecem uma atenção que não lhes é concedida no artigo que estamos a comentar — ou, pelo menos, uma maior atenção.

Um desses aspectos refere-se ao carácter algorítmico que pode ser associado a cada função. Parece-me que a importância da função como algoritmo não está relacionada apenas com o facto de ser esse o aspecto considerado nas Ciências da Computação mas principalmente, do ponto de vista educativo, de que essa visão dinâmica da relação funcional é facilmente aceite e compreendida pelos alunos, no início do terceiro ciclo do ensino básico e talvez mesmo antes. Uma função numérica pode ser apresentada de modo intuitivo como uma *máquina* chamada *f* que *transforma* cada número ***x*** que lhe fornecemos no número ***f(x)***. Essa máquina pode ser facilmente simulada por um pequeno programa de computador. No projecto MAT_{789} , foi esta precisamente a primeira abordagem que se fez do conceito de função, com resultados que consideramos muito positivos (v. artigo citado de L. Cunha Leal).

Um outro aspecto não considerado no artigo de J. Pedro Ponte, refere-se a um ponto de vista sobre o ensino das funções, em meu entender correcto e fundamental, que estava pelo menos implícito no movimento da M.M. — embora não passado à prática nos programas vigentes — e que seria muito negativo se fosse deitado para o lixo juntamente com as *bolinhas e as setas*... Quero referir-me à perspectiva de que para a compreensão do conceito de função existem dois aspectos essenciais e complementares, que resumirei da seguinte forma:

- no primeiro aspecto, as funções são consideradas *uma de cada vez*, e explicitadas e representadas nas várias formas possíveis, tal como está extensa e exemplarmente explicado no artigo que estamos a comentar;
- no segundo aspecto, as funções tornam-se objectos da Matemática *relacionáveis e combináveis*.

Seria errado, no meu entender, desprezar, no ensino das funções, mesmo elementar, este segundo aspecto. É certo que ele apenas se explicitou neste século, é precisamente uma conquista e das mais importantes da Matemática contemporânea. Mas seria mau que os alunos do ensino básico ficassem, a este respeito, na Matemática do século passado, estando a do nosso século reservada para os que prosseguem os seus estudos. Parece-me claro que o primeiro aspecto, no ensino, deve preceder obrigatoriamente o segundo, e que este deve ser abordado de modo muito intuitivo e elementar. Mas seria ficar a um nível muito *rasteiro* e insuficiente ocuparmo-nos apenas do primeiro aspecto. Tal como para conhecer uma paisagem nos elevamos a um ponto alto, com o fim de *ganhar perspectiva*, no estudo das funções devemos dar, por pequeno que seja, um passo no mesmo sentido, elevando-nos de **f(x)** para **f** , e depois considerando duas funções **f** e **g**, procurando os valores de x para os quais são iguais, tentando dar significado a **f** + **g** e **f.g**, etc..

Tudo isto pode e deve ser feito sem formalismos desnecessários, de modo intuitivo, experimental e com grande apoio nas representações gráficas. Pode por exemplo estudar-se a função **f(x) = 2x** e traçar-se o seu gráfico. Depois dar um exemplo de uma função constante, a função **g(x)=1**. O seu gráfico também pode ser traçado. Que poderá significar **f+g**, podemos mesmo dizer **f+1**? Qual será o seu gráfico? Como pode ser obtido a partir dos dois gráficos? Numa ocasião posterior, **f** e **g** já são outras funções, **f(x)=x** e **g(x)=-1**. Traçamos os seus gráficos. Que significará o produto **f.g**? Como será o seu gráfico? Sendo **f** agora uma função qualquer, por exemplo dada pelo seu gráfico, qual será o gráfico da função **-1.f**?

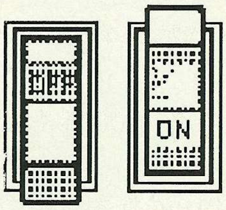
Julgo também que a composição de funções deve ser abordada, embora, está claro, de forma intuitiva e não técnica. Na realidade, estamos perante uma nova forma característica de combinar objectos matemáticos. Se o conceito de função foi inicialmente abordado no seu aspecto algorítmico, a composição de funções é uma operação quase trivial — é fácil imaginar duas máquinas encadeadas, em que o que sai de uma dá entrada na outra... Os alunos do projecto MAT_{789} tiveram o seu primeiro contacto com a composição de funções no decorrer de um teste, e consideramos a experiência positiva (v. artigo citado de L. Cunha Leal). Julgo que as transformações geométricas, que inicialmente devem ser abordadas numa perspectiva não funcional, podem constituir um bom material para encontrar exemplos interessantes da composição de funções, num processo essencialmente matemático de simplificação e enquadradamento num esquema unificador.

Parece-me que assim, e relativamente ao conceito de função, o currículo de Matemática pode cumprir um dos seus objectivos mais relevantes — o de ajudar a adquirir progressivamente, por parte dos alunos, a compreensão da natureza e da importância dos objectos e dos processos matemáticos, nomeadamente dos mais actuais.

Eduardo Veloso
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

Sim e não (ou talvez)

João Pedro Ponte



Agradecendo os diversos "sins" manifestados por E. Veloso em relação ao meu artigo no número anterior da revista Educação e Matemática, creio merecerem alguns comentários os "mas" entretanto levantados.

Começarei pelo segundo, que me parece francamente mais simples. A adição, subtração, multiplicação e divisão de funções são temas que devem ser abordados no ensino secundário (eventualmente de forma muito elementar no 3º ciclo do ensino básico). A composição de funções pode ser igualmente tratada, embora, como conceito mais delicado, exija os necessários cuidados. Neste ponto não haverá grandes discordâncias, com a ressalva de que, na minha opinião, não se tratam de "conquistas da Matemática do Século XX" mas antes de aspectos do conceito de função que estão presentes desde a sua origem. Lembremos que, por exemplo, já Leibniz trabalhava com produtos de funções, tendo tido aliás grande dificuldade em acertar com a regra da derivada do produto, que imaginava seguir uma lei do tipo D(fg)=(Df) (Dg). O uso de uma notação moderna, obviamente vantajoso neste caso, não nos deve fazer esquecer a origem concreta dos conceitos.

Passemos então à outra questão. O conceito de algoritmo constitui uma perspectiva nova e prometedora, alimentada pelo desenvolvimento das Ciências da Computação. Por um reforço da perspectiva algorítmica da Matemática escolar se têm batido alguns matemáticos, como A. Engel. Mas o facto é que dispomos ainda hoje de reduzidas indicações concretas sobre o valor pedagógico desta abordagem.

Apresentar uma função como um algoritmo só poderá ter interesse se isso vier a dar origem ao estudo de diversos algoritmos e das suas propriedades. Como procurei defender no artigo em causa, não serve de nada falar de conceitos que não são devidamente explorados. Poderá satisfazer o nosso sentido estético mas a realidade é que os alunos nem sequer se chegam a aperceber do seu verdadeiro significado. O objectivo do ensino da Matemática não é apresentar umas tantas ideias consideradas muito importantes para simples contemplação, sejam elas modernas ou antigas, mas sim constituir uma base conceptual rica em oportunidades de problematização, exploração, investigação, dedução e aplicação. Mas a apresentação das funções como algoritmos não é indispensável para a introdução deste conceito (de resto já conhecido desde o 1º ciclo do ensino básico), tal como no estudo das transformações geométricas estas não têm que ser necessariamente consideradas como funções. A ideia de algoritmo é conceptualmente bastante diferente da ideia de função numérica como correspondência entre dois conjuntos dada por uma expressão analítica (simples ou composta). Recordemos que a execução de um algoritmo comporta um número variável de passos, muitas vezes em sequências bastante distintas, conforme os valores iniciais dados. Num algoritmo interessa saber se termina ao fim de um número finito de passos, se resolve o problema proposto, se é eficiente (segundo diversos critérios). Numa função numérica interessa saber se tem zeros, intervalos de monotonia, assímptotas, se é contínua, etc. Só mais tarde, quando estes conceitos estiverem suficientemente trabalhados é que poderá haver interesse na sua unificação num quadro conceptual mais alargado.

Funções como algoritmos? Se for apenas para dar o exemplo das "máquinas de transformação" o efeito poderá até ser negativo, levando a uma maior confusão sobre o que é um algoritmo. Quanto ao estudo dos algoritmos, isso é outra questão: investigue-se, façam-se experiências de natureza curricular, avalie-se do interesse educativo desta abordagem. Quando houver dados que permitam uma certa margem de segurança, decida-se pela sua inclusão ou não nos currículos, e como.

João Pedro Ponte
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências de Lisboa

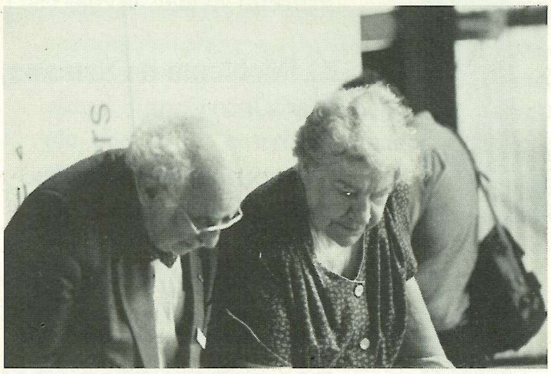
Em Memória de Hans Freudenthal

No passado dia 13 de Outubro, morreu uma das maiores figuras da Educação Matemática das últimas décadas — Hans Freudenthal.

Embora conhecido mundialmente como holandês, Freudenthal nasceu em Luckenwalde, na Alemanha, a 17 de Setembro de 1905. Estudou nas Universidades de Berlim e Paris, tendo depois ido viver e trabalhar para Amsterdão. Em 1946 ocupou um lugar de professor na Universidade de Utrecht. O seu trabalho, como matemático, foi dedicado especialmente à Geometria e aos fundamentos da Matemática.

A partir de 1955, o seu centro de interesses começou a deslocar-se da Matemática para a Educação Matemática. Foi representante da Holanda no ICMI, de que veio a ser presidente entre 1966 e 1970. Em 1968, iniciou a revista *Educational Studies in Mathematics* com a publicação das actas do colóquio "How to teach mathematics so as to be useful". Foi depois director do IOWO que veio a originar o grupo de investigação OW&OC de Utrecht.

Freudenthal escreveu dezenas de livros e artigos sobre educação matemática nas últimas décadas que influenciaram decisivamente o rumo que esta área veio a tomar, não só na Holanda como em



H. Freudental e A. -Z. Krygowska no CIEAEM de Leiden em 1985 (Foto de H.M.Guimarães)

todo o mundo. O seu livro *Mathematics as an Educational Task* (1973) é um marco histórico. Uma das ideias que sempre acompanhou o seu trabalho foi a de que as crianças nos podem ensinar muito e que é preciso observar vezes sem conta os processos individuais de aprendizagem. A paciência é uma das grandes virtudes pedagógicas, escreveu ele num dos seus livros.

Embora se tenha reformado em 1975, continuou a trabalhar até morrer com 85 anos de idade. No dia 12 de Outubro, foi pela última vez ao seu gabinete nas instalações do OW&OC. O seu último livro está ainda por publicar; intitula-se *Revisiting Mathematics Education* e sairá em 1991.

Freudenthal morreu num sábado de Outono, sentado num banco do jardim onde costumava passear com os netos, a ler o seu jornal preferido — jornal onde publicou não só muitos artigos sobre educação mas também diversos poemas, contos e ensaios.

Os trabalhos de Freudenthal são uma referência essencial para todos aqueles que se dedicam à educação matemática. E o seu estudo é seguramente a melhor forma de homenagear a grande figura que ele foi.

Paulo Abrantes