Ações do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos

Joana Mata-Pereira, João Pedro da Ponte

Um dos grandes objetivos da Matemática escolar é, sem grande margem para dúvidas, desenvolver o raciocínio matemático dos alunos. Contudo, o que podemos fazer para desenvolver o raciocínio matemático constitui uma questão bastante complexa e, paradoxalmente, pouco discutida.

Se pretendemos que os nossos alunos tenham uma visão da Matemática como uma disciplina lógica e coerente, temos de promover o raciocínio matemático ao longo do ano letivo, não limitando o trabalho com esta capacidade transversal a algumas aulas ou ao ensino de determinados tópicos matemáticos. Pelo contrário, desenvolver o raciocínio matemático dos alunos deve ser um processo contínuo, que ocorre em todas as aulas, em articulação com outros objetivos de aprendizagem. Para tal, é importante clarificar em que consiste o raciocínio matemático e saber quais os modos de o promover na sala de aula.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Um ponto essencial para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos é compreender o que se entende por raciocinar matematicamente e que processos isso envolve. Raciocinar matematicamente é fazer inferências justificadas, ou seja, partir de informação existente para obter novas conclusões, de uma forma justificada, com base em ideias, propriedades ou definições matemáticas. O raciocínio matemático, numa perspetiva dedutiva, pode identificar-se com a inferência lógica, que se caracteriza pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões (Aliseda, 2003). Contudo, também se pode raciocinar de modo indutivo, identificando uma característica particular comum a diversos casos e formulando uma generalização (Pólya, 1945). E ainda se pode raciocinar de forma abdutiva, formulando uma generalização com base na perceção de uma relação entre diversos aspetos de uma determinada situação (Rivera & Becker, 2009). Assim, o raciocínio matemático pode ser de natureza diversa, nomeadamente, indutiva, abdutiva ou dedutiva, incluindo tanto a formulação de novas ideias como a elaboração e validação de novas conclusões (Silva, 2009).

Esta definição de raciocínio matemático, pela sua abrangência, inclui uma diversidade de processos de raciocínio, nomeadamente, a formulação de questões, a formulação e teste de conjeturas, a definição e aplicação de estratégias de resolução e a justificação. Tal como referem Lannin, Ellis e Elliot (2011), num livrinho publicado pelo NCTM, a generalização e a justificação destacam-se destes processos pelo seu papel central na Matemática. A generalização, por se pretender afirmar propriedades, conceitos e procedimentos gerais que se pretendem válidos para um conjunto abrangente de condições ou objetos matemáticos. A justificação, pelo rigor, lógica e coerência associados a esta ciência, onde se espera que as generalizações formuladas sejam justificadas e validadas com base em propriedades, procedimentos ou ideias matemáticas.

AÇÕES DO PROFESSOR PARA O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Cabe ao professor propor aos seus alunos situações que os incitem a raciocinar matematicamente. Contudo, como refere Jo Boaler (2010, p. v), «seria desonesto fingir que as abordagens de ensino [que promovem o raciocínio matemático] são fáceis ou bem compreendidas».

O modo de trabalho na sala de aula é um dos aspetos centrais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Em aulas de ensino expositivo, onde o professor apresenta os assuntos e propõe aos alunos que apliquem métodos de resolução de exercícios e problemas que ele próprio explicou, dificilmente surgem oportunidades para os alunos raciocinarem matematicamente. Já as aulas de ensino exploratório (Ponte, 2005), onde o professor propõe aos alunos a resolução de uma tarefa, os alunos trabalham autonomamente e, por fim, tem lugar uma discussão por toda a turma dessa tarefa, apresentam um maior potencial para que surjam situações que favorecem o surgimento de raciocínios matemáticos. Nestas aulas, os momentos de discussão coletiva surgem como particularmente potenciadores da aprendizagem dos alunos e, consequentemente, do desenvolvimento do raciocínio matemático. Para tal é importante que o professor incite a apresentação pelos alunos de uma variedade de respostas, que as articule e que oriente a discussão no sentido de uma compreensão mais aprofundada das ideias matemáticas envolvidas (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Num ensino desta natureza, o tipo de tarefas a propor desempenha um papel fundamental. Vários estudos identificam os problemas e as tarefas de natureza mais aberta, como as explorações e as investigações, como potenciadoras do desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos (e.g. Francisco & Maher, 2011).

No quadro do ensino exploratório, uma das ações do professor fundamental para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é o questionamento. O professor deve questionar os seus alunos com o intuito de apoiar o seu raciocínio e o seu trabalho. Com este objetivo, *deve acompanhar a resolução da tarefa dando apenas as indicações estritamente necessárias*, sem reduzir significativamente o desafio da tarefa proposta. Se o professor apresenta demasiadas indicações aos alunos e não os desafia, simplifica a resolução da tarefa e deixa de apoiar o raciocínio. O professor deve ainda incentivar os alunos a apresentar a explicação do *«porquê», dar sentido a justificações e pedir justificações alternativas*. É ainda importante destacar ou solicitar aos alunos que *identifiquem justificações válidas e inválidas, enfatizando o que valida uma justificação*.

Para além do questionamento, o professor pode ainda empreender outras ações tendo em vista a aprendizagem e a partilha e compreensão de processos de raciocínio. Durante a discussão coletiva o professor deve *encorajar os alunos a partilhar as suas ideias e várias versões do seu raciocínio*. Como refere Karin Brodie (2010), é também importante que se *aceitem, valorizem e integrem as contribuições incorretas ou parciais dos alunos, promovendo uma discussão que as desconstrua, complemente ou clarifique*.

Visando processos de raciocínio mais formais, como a demonstração, uma das abordagens que pode ser estruturante é a justificação como atividade coletiva (Galbraith, 1995). Para que isso ocorra, o professor deve *propor demonstrações sempre que estas forem pertinentes e adequadas aos conhecimentos dos alunos*. É ainda de destacar que o professor deve *desafiar os alunos a ir além da tarefa, quer pela formulação de novas questões, quer pela formulação de generalizações*.

Este conjunto de ações (questionar, encorajar a partilha de ideias, valorizar contribuições parciais, propor demonstrações e desafiar a ir mais além) não esgotam as ações do professor que podem promover o desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mas são certamente muito importantes.

AÇÕES DO PROFESSOR NUMA AULA SOBRE SEQUÊNCIAS

Vejamos uma situação que ilustra grande parte das ações do professor anteriormente destacadas. Esta situação corresponde a parte do momento de discussão coletiva da primeira tarefa proposta a uma turma de alunos do 8.º ano na unidade Sequências. Apesar deste tópico ter sido abordado em anos anteriores, o momento de trabalho autónomo desta aula revelou que os alunos estavam pouco à vontade. A tarefa proposta aos alunos (Figura 1) tem uma natureza exploratória e tem por objetivo conduzi-los a obter o termo geral da sequência. Atendendo a que a turma tem alunos com ritmos de trabalho muito distintos, o momento de trabalho autónomo é realizado em pares e a professora não estabelece um tempo para a sua realização, procurando deixar que a maioria dos alunos termine a tarefa. A professora avança para a discussão coletiva quando verifica que todos os pares já pensaram na primeira questão da tarefa 1. Toma esta decisão porque, como diz, entende que «há alunos que [não chegam ao final da tarefa] … E, ou eu estou ali com eles individualmente a tentar, ou avanço um bocadinho, não se justifica [mais tempo de trabalho em pares]».

No segmento da discussão referente à questão 1.3, a professora convida o par Duarte e Marisa a participar, encorajando a *partilha de ideias:*

Duarte: Nós fizemos 86, que é o número de pontos … A dividir por 4, menos 1.

Professora: Assim [escreve no quadro $\frac{86-1}{4}$]? Só fala o Duarte.

Duarte: Foi. 86 menos 1 a dividir por 4.

A diferença entre o que Duarte apresenta e o que a professora escreve é discutida com a turma e, resolvida a situação, a professora retoma a estratégia do aluno:

Professora: Duarte, perdi-me, explica-me.

…

Duarte: Então, é o número de pontos que é 86… Depois subtraímos 1 que é o ponto do meio… E depois a dividir por 4, que é o que vai sempre aumentando.

Professora: Este 4 é sempre o que vão aumentando?

1. Observa a seguinte sequência de figuras formadas por pontos.

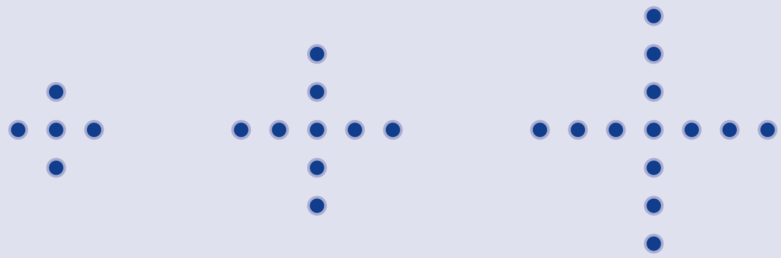

Fig. 1 **Fig. 2** **Fig. 3**

1.1. Indica o número total de pontos da figura 4.

1.2. Sem desenhar a figura, indica o número total de pontos da figura 8. Explica como obtiveste a tua resposta.

1.3. Existirá alguma figura com 86 pontos? Justifica a tua resposta

1.4. Qual o número da figura com 65 pontos? Explica como chegaste à tua resposta.

1.5. Escreve a expressão algébrica que representa o número de pontos da figura n.

Figura 1.—Primeira tarefa proposta na unidade de sequências

Duarte: Não, é o número de lados.

Professora: Ah, o número de lados. Quanto é que deu Duarte?

Duarte: 21,25.

Atendendo a que Duarte dá a sua resposta por concluída, a professora questiona-o para que interprete a expressão que apresentou e, de seguida, guia o aluno na identificação de um erro dessa mesma interpretação, *acompanhando a resolução apresentada e dando apenas as indicações necessárias*.

Perante a resposta de Duarte, a professora continua a apoiar a sua intervenção, pedindo lhe uma interpretação do valor obtido e *levando-o a justificar* essa interpretação, *solicitando a explicação do porquê:*

Professora: E a minha pergunta para ti é, o que é que tu e a Marisa concluíram?

Duarte: Que não existe nenhuma.

Professora: Porquê?

Duarte: Porque o número da figura [ordem] é sempre um número inteiro.

Professora: Número inteiro. Este número não é inteiro.

A professora dá a intervenção de Duarte por terminada ao informar a turma de que o valor que o aluno obteve não é um número inteiro, interpretando e *validando a sua resposta*.

Depois de apresentada uma nova estratégia de outros alunos, a professora avança para a discussão da questão 1.4, onde um par de alunos apresenta e justifica a sua resolução, com o seu apoio. Joaquim tenta retomar a questão 1.3, o que é aceite pela professora, promovendo assim a *partilha de ideias:*

Joaquim: Na 1.3 nós chegámos à conclusão que não era, mas com outra resolução.

Professora: Então diz.

Joaquim: Nós fizemos… Nós justificámos que não era múltiplo de 4.

Professora: Agora, daí a importância da discussão, pergunta para a turma: O Joaquim e o Guilherme disseram assim 86 não faz parte da sequência porque não é múltiplo de 4. E agora vou fazer uma pergunta a um par que ainda não ouvi, que é a Bianca e a Ana. Pergunta para vocês: Se este argumento serve ou não para justificar. Uma de vocês que me explique, ou então as duas em coro.

Perante a proposta de resolução de Joaquim, a professora *desafia os alunos a avaliar a validade* desta resolução. Direciona a questão para a turma, mas depois questiona diretamente um par de alunas que ainda não tinha participado:

Bianca: Se eles dissessem que 85 não era múltiplo de 4 podiam fazer isso, mas… Porque, então, tem de ser, para ser múltiplo de 4 nós tiramos 1, que é o ponto central.

Professora: Sim ou não? Joaquim e Guilherme, perceberam ou não? Não? Ainda não perceberam. Bianca, explica tu.

Bianca dá a entender que a resposta dos colegas não é válida e justifica a sua opinião. Contudo, a sua justificação não é suficiente para Joaquim e Guilherme compreenderem que a resposta é inválida. Perante esta situação, a professora opta por *desafiar Bianca a reformular a sua justificação:*

Bianca: O número de pontos é 86, só que nós queremos tirar primeiro o ponto central, só depois é que podemos dividir por 4.

Professora: Porque é que só depois é que podemos dividir por 4?

Bianca: Porque se fizéssemos 86 a dividir por 4 menos 1 era aquilo que eles estavam a dizer que não dá certo.

Professora: Sim ou não, Guilherme?

Guilherme: Acho que sim, porque o do meio nunca... Era como se estivéssemos a cortar o do meio.

Professora: Aqui era como se estivessem a cortar o do meio... A soma destes 4 braços é que é múltiplo de 4, não é a soma dos 4 braços com o ponto central.

Apesar da validade da afirmação de Bianca, a professora desafia novamente a aluna a justificar parte dessa afirmação, *solicitando a explicitação do «porquê»*. Finalmente confirma, ainda, se Guilherme compreendeu a justificação e informa a turma da representação destacada pelo aluno.

A CONCLUIR

Tendo como ponto de partida tarefas de natureza exploratória e colocando questões desafiantes aos alunos, as ações do professor nos momentos de discussão coletiva podem ser as mais variadas. No segmento da discussão coletiva aqui apresentado, as ações da professora ilustram a grande maioria das ações propostas para o desenvolvimento do raciocínio matemático, o que leva à realização de justificações por parte dos alunos. No seguimento da discussão apresentada, com ações idênticas por parte da professora, os alunos obtêm também o termo geral da sequência, que corresponde à generalização pretendida com esta tarefa.

Ao longo desta discussão é possível observar que os desafios que são propostos aos alunos surgem como determinantes para incitar processos de raciocínio. Contudo, o professor não pode limitar as suas ações a desafiar, deve complementá-las com ações de guiar ou apoiar quando os alunos têm as ferramentas necessárias para avançar na discussão e com ações de informar ou de sugerir quando os alunos não têm essas ferramentas.

Desenvolver o raciocínio matemático dos alunos não é um processo linear e, como tal, não existe uma «receita» das ações do professor que levam de forma garantida ao desenvolvimento desta capacidade. No entanto, ao estar consciente dos processos de raciocínio que pretende que os seus alunos alcancem em cada momento da aula e ao encadear as discussões coletivas com vista a desafiar os alunos para que realizem generalizações e justificações, o professor está certamente a contribuir para que o raciocínio matemático faça parte da sua aprendizagem.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese*, *134*, 25–44.

Boaler, J. (2010). The road to reasoning. In K. Brodie, *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms* (pp. v–vii). New York, NY: Springer.

Brodie, K. (2010). *Teaching mathematical reasoning in secondary school classrooms*. Doi:10.1007/978-0-387-09742-8

Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2011). Teachers attending to students' mathematical reasoning: lessons from an after-school research program. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(1), 49–66. Doi:10.1007/s10857-010-9144-x

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher*, *88*(5), 412–417.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics* (Vol. I). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Rivera, F., & Becker, J. (2009). Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School*, *15*(4), 213–221.

Silva, A. P. (2009). A problemática da descoberta e da prova. *Educação e Matemática*, *101*, 37–41.

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for help teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Joana Mata-Pereira
João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa