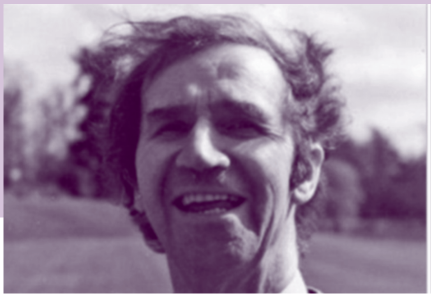
Nesta secção apresentamos um texto de Richard Skemp, originalmente publicado em 1976 na revista *Mathematics Teaching*, uma das revistas da ATM — *Association of Teachers of Mathematics* do Reino Unido, dirigida a professores de Matemática.

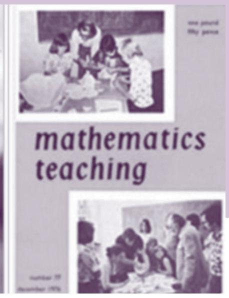
Richard Skemp nasceu em 1919 em Inglaterra, onde desenvolveu a sua carreira começando como professor de Matemática. O seu interesse em estudar a forma como as crianças aprendem conduziu-o mais tarde ao doutoramento em Psicologia, tornando-se um dos pioneiros na articulação de três áreas — a Matemática, a Educação e a Psicologia.

O artigo que selecionámos foca-se nos significados que atribuímos à compreensão no contexto da aprendizagem. Será que todos temos a mesma conceção sobre o que significa aprender com compreensão? Ou podemos falar de diferentes tipos de compreensão? Apesar dos 40 anos que passaram desde a sua publicação original, consideramos que as ideias que discute se mantêm atuais. Poderíamos até pensar que são especialmente relevantes para a discussão das atuais alterações curriculares, mas serão, sobretudo, para a reflexão sobre o trabalho que diariamente realizamos na sala de aula.

Compreensão relacional e compreensão instrumental[*]

Richard R. Skemp





FALSOS AMIGOS

Falsos amigos é um termo usado pelos franceses para descrever palavras que são iguais em duas línguas, ou muito parecidas, mas cujos significados são diferentes. Por exemplo:

Palavra francesa	Significado em inglês
(*histoire*) história	conto, não história
(*libraire*) biblioteca	livraria, não biblioteca
(*chef*) chefe de cozinha	o líder de qualquer organização, não apenas um chefe de cozinha
(*agrément*) aprovação	prazer ou divertimento, não um acordo
(*docteur*) doutor	doutorado, não um praticante de medicina
(*médecin*) médico	médico, não medicina
(*parent*) parente	relações em geral, incluindo pais

[*] Traduzido e reimpresso a partir de Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15 com a autorização do National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia, USA. Todos os direitos reservados. O NCTM não se responsabiliza pela exatidão ou qualidade da tradução.
Tradução dos alunos do Mestrado em Didática da Matemática de 2015/16 do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa Dinashavari Lacmane, Margarida Carvalho, Marisa Pedro, Marisa Silva, Ricardo Cardoso, Vânia Santiago e revisão de João Pedro da Ponte e Lina Brunheira.

Existem *falsos amigos* na língua inglesa falada em diferentes partes do mundo. Se um inglês pedir um biscoito (*biscuit*), nos Estados Unidos da América, ser-lhe-á dado o que chamamos um *scone*. Para obter o que chamamos um biscoito, ele deve pedir uma bolacha (*cookie*). Existem, em inglês, palavras deste tipo que são usadas tanto em Matemática como na vida quotidiana, tais como espaço vetorial (*field*), grupo, anel, ideal.

Alguém que desconheça que a palavra que está a usar é um *falso amigo* pode cometer erros inconvenientes. Esperamos que a história (*history*) seja verdadeira, mas não o conto (*story*); trazemos livros da biblioteca (*library*) sem pagar mas não de uma livraria (*bookshop*); e assim por diante. Mas nos exemplos anteriores existem pistas que nos podem deixar alerta: uma diferença no idioma, no país, ou no contexto.

No entanto, se a mesma palavra for usada na mesma língua, país ou contexto, com dois significados, cuja diferença seja não trivial mas tão elementar como a diferença (por exemplo) entre o significado de *histoire* e *story*, que é diferença entre facto e ficção, podemos esperar uma confusão séria. Tais palavras podem ser identificadas no contexto da Matemática; e são os significados alternativos ligados a essas palavras que estão, a meu ver, na génese das muitas dificuldades na educação matemática de hoje.

Uma destas palavras é «compreensão». Quem me chamou a atenção alguns anos atrás foi Stieg Mellin-Olsen, da Universidade de Bergen, Noruega, que existem dois significados usuais para esta palavra. Ele distingue esses significados designando-os por «compreensão relacional» e «compreensão instrumental». O primeiro diz respeito ao que eu sempre entendi por compreensão, tal como, provavelmente, a maioria dos leitores deste artigo: saber o que fazer e porquê. A compreensão instrumental, até há pouco tempo não a considerava sequer como compreensão. É o que no passado eu descrevi como regras sem fundamentação, sem me aperceber que para muitos alunos e *seus professores* a posse de tal regra, e a capacidade para a usar, era o que eles entendiam por «compreensão».

Suponha que o professor relembra a turma que a área de um retângulo é dada por $A = L \times B$. Um aluno que tem estado ausente diz que não compreende, por isso o professor explica-lhe nestes moldes. «A fórmula diz-te que, para obteres a área do retângulo, tens de multiplicar o comprimento pela largura.» «Oh, estou a ver», diz a criança, e continua o exercício. Se lhe disséssemos (com efeito) «Podes pensar que compreendeste, mas na verdade isso não acontece,» ele não concordaria. «Claro que sim. Repare; tenho todas estas respostas corretas.» Nem ele ficaria satisfeito com a nossa desvalorização dos seus resultados. E com o seu significado da palavra, ele compreende.

Podemos pensar em exemplos deste tipo: «pedir emprestado» na subtração, «inverter e multiplicar» para a divisão de uma fração, «mudar de membro e mudar o sinal», numa equação, são casos óbvios; mas uma vez o conceito formado, outros exemplos de explicações instrumentais podem ser identificados em abundância em muitas outras situações. Aqui estão dois exemplos de um texto usado num antigo liceu, agora independente, com um padrão académico muito elevado.

Multiplicação de frações: Para multiplicar uma fração por uma fração, multiplicam-se os dois numeradores para se obter o produto do numerador, e os dois denominadores para se obter o denominador. Por exemplo:

$$\frac{2}{3} \text{ de } \frac{4}{5} = \frac{2 \times 4}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$
$$\frac{3}{5} \times \frac{10}{13} = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$$

O sinal de multiplicação $\times$ é geralmente usado em vez da palavra «de».

Círculos: Quando medimos o perímetro de uma circunferência (ou seja, o comprimento da sua fronteira) verificamos que é um pouco mais do que três vezes o comprimento do seu diâmetro. Em qualquer circunferência, o perímetro é aproximadamente 3,1416 vezes o diâmetro, que é aproximadamente 3 1/7 vezes o diâmetro. Nenhum desses valores é exato e o número exato não pode ser expresso nem como fração nem como dízima. O número é representado pela letra grega π.

Circunferência = πd ou $2\pi r$.

Área = πr^2

O leitor é levado a fazer pessoalmente este exercício de procurar e identificar exemplos de explicações instrumentais, tanto em textos como na sala de aula. Terá três benefícios. (i) Para indivíduos como o escritor e para a maioria dos leitores deste artigo, pode ser difícil aperceber-se como a abordagem instrumental está generalizada. (ii) Através de repetidos exemplos, poderá consolidar os dois conceitos contrastantes. (iii) É uma boa preparação para tentar formular a diferença em termos gerais. O resultado (i) é necessário para o que segue no resto desta secção, enquanto (ii) e (iii) serão úteis para outras.

Se for aceite que estas duas categorias são ambas bem preenchidas pelos alunos e professores cujos objetivos são respetivamente compreensão relacional e instrumental (pelos alunos), duas questões surgem. Primeiro, será que isto importa? E segundo, um dos tipos é melhor que o outro? Durante anos tomei por garantida a resposta a ambas as perguntas: em resumo, ‹Sim; relacional›. Mas a existência de um grande corpo de professores experientes e um grande número de manuais pertencentes ao campo oposto forçou-me a pensar mais sobre o porquê de eu ter este ponto de vista. No processo de mudança do intuitivo para reflexivo, penso que aprendi alguma coisa útil. As duas questões não são completamente separadas mas nesta secção eu focar-me-ei o mais possível na primeira: será que isto importa?

O problema aqui é que há um desencontro, que aparece automaticamente em qualquer situação de *falsos amigos*, e que não depende se o significado do A ou B é ‹o correto›. Imaginemos, se formos capazes, que a escola A envia uma equipa para ir à escola B para um jogo chamado «futebol», mas que ninguém sabe que existem dois tipos (um chamado de futebol de 11» e outro de «*rugby*»). A escola A joga futebol de 11 e nunca ouviu falar de *rugby* e vice-versa para B. Cada equipa decidirá rapidamente que os outros são malucos, ou são um grupo de jogadores tontos. Em particular, a equipa A pensará que a equipa B usa uma bola deformada e comete uma falta atrás de outra. A não ser que as duas equipas parem e comecem a discutir sobre qual o jogo que eles pensam que estão a jogar, o tempo suficiente para ganhar alguma compreensão mútua, o jogo irá descambar em desordem e as duas equipas nunca mais vão querer encontrar-se outra vez.

Apesar de ser difícil imaginar tal situação a levantar-se num campo de futebol, esta não é uma analogia improvável para o que acontece em muitas aulas de Matemática, mesmo nos dias de hoje. Existe uma importante diferença, pois pelo menos um dos lados não se pode recusar a jogar. O encontro é obrigatório, nos cinco dias por semana, cerca de 36 semanas por ano, ao longo de 10 anos ou mais na vida da criança.

Deixando de lado por agora a questão de saber se um tipo é melhor do que o outro, existem dois tipos de desencontros matemáticos que podem ocorrer:

1) Alunos, cujo objetivo é compreenderem instrumentalmente, ensinados por um professor que deseja que eles aprendam relacionalmente.
2) O caso contrário.

O primeiro destes casos irá causar menos problemas de curto prazo aos alunos mas será frustrante para o professor. Os alunos simplesmente não querem saber de todo o cuidadoso trabalho de planificação que ele realiza para preparar o que se irá aprender a seguir, nem das suas cuidadosas explicações. Tudo o que eles querem é algum tipo de regra para obter a resposta. Assim que esta é obtida, eles agarram-se a ela e ignoram o resto.

Se o professor faz uma pergunta que não se encaixa na regra, com certeza que os alunos irão obter uma resposta errada. Para o próximo exemplo tenho de agradecer Sr. Peter Burney, na altura futuro professor a fazer a iniciação à prática profissional, na Faculdade de Educação em Coventry. Ao ensinar áreas, ele começou a suspeitar que as crianças não estavam realmente a compreender o que estavam a fazer. Por isso ele perguntou-lhes: «qual é a área de um campo com 20 cm por 15 jardas? A resposta foi «300 cm^2». Ele perguntou: «Porque não 300 jardas quadradas?» Resposta: «Porque a área é sempre em cm^2».

Para prevenir erros como estes, os alunos necessitam de outra regra (ou, com certeza, uma compreensão relacional), que ambas as dimensões devem estar na mesma unidade. Isto antecipa um dos argumentos que eu usarei contra a compreensão instrumental, que geralmente envolve uma multiplicidade de regras em vez de alguns princípios de aplicação mais geral.

É claro que existe sempre a hipótese de alguns alunos entenderem onde o professor quer chegar. Nem que seja apenas pelo bem desses, penso que o professor deverá persistir. Para muitos alunos, provavelmente a maioria, as tentativas do professor para lhes mostrar que saber apenas usar a regra não é suficiente, não serão bem acolhidas. ‹O bem é inimigo do melhor,› e se os alunos conseguem obter as respostas corretas através do raciocínio a que estão habituados, não estarão recetivos a sugestões para experimentar algo para além disso.

O outro desencontro, em que os alunos tentam compreender relacionalmente mas o ensino impossibilita esse facto, pode causar maiores danos. Um exemplo que guardo na memória é o de uma criança bastante inteligente, com um Q.I. de 140. Aos cinco anos já conseguia ler o *The Times*, mas aos sete reclamava frequentemente acerca dos seus trabalhos de casa de Matemática. A sua infelicidade provinha de querer compreender de forma relacional com um ensino que não permitia compreender dessa maneira. A minha evidência que esse era o caso é que quando o comecei a ensinar relacionalmente com a ajuda do material Unifix, ele rapidamente passou a compreender com verdadeiro prazer.

Outro desencontro, menos evidente, é aquele que ocorre entre o professor e o manual. Suponhamos que estamos perante um professor cuja conceção de compreensão é instrumental, mas que por uma razão ou outra está a utilizar um manual cujo objetivo é a compreensão relacional pelo aluno. Será preciso mais do que isto para alterar os seus hábitos de ensino. Estava numa escola que adotou o meu próprio manual[a] e reparei (estavam eles no Capítulo 1 do Volume 1) que alguns alunos estavam a escrever respostas do género ‹o conjunto das {flores}›.

Quando referi o facto ao professor (coordenador de Matemática) ele pediu à turma para prestar atenção e disse: «Alguns de vós não estão a escrever corretamente as respostas. Vejam o exemplo do livro, no início do exercício, e certifiquem-se de que escrevem as vossas respostas exatamente da mesma forma.»

Muito do que tem vindo a ser ensinado sob a descrição de «Matemática moderna» tem vindo a ser ensinado e aprendido de forma tão instrumental quanto o era o conteúdo programático que foi substituído. Tal é previsível a partir da dificuldade em acomodar (reestruturar) os nossos esquemas[b] atuais. Na medida em que assim é, as inovações provocaram, provavelmente, mais prejuízos do que benefícios, ao introduzirem um desencontro entre o professor e os objetivos implícitos no novo programa. A intenção de se introduzirem conceitos tais como, conjuntos, aplicações e variáveis é a ajuda que estes, se bem utilizados, podem dar à compreensão relacional. Se os alunos continuam a ser ensinados instrumentalmente, então, provavelmente, um programa ‹tradicional› irá favorecê-los mais. Pelo menos, adquirem proficiência num determinado número de técnicas matemáticas que lhes serão úteis em outras disciplinas, e cuja falta foi, recentemente, alvo de reclamações por parte de professores de ciências, empregadores, e outros.

No início deste artigo referi que dois *falsos amigos* poderiam ser identificados no contexto da matemática. O segundo é ainda mais sério; trata-se da própria palavra ‹matemática› em si. É que não estamos a falar de melhor ou pior ensino relativo ao mesmo tipo de Matemática. É fácil pensar que assim seja, do mesmo modo que os nossos jogadores de futebol imaginários, que não sabiam que o seu adversário estava a jogar um jogo diferente, poderiam assumir que a equipa contrária pegou na bola e correu com ela na mão porque os seus jogadores não sabiam chutar adequadamente, sobretudo com uma bola tão disforme. E, nesse caso, poderiam, cordialmente, oferecer-lhes uma bola adequada e algumas lições sobre como fintar. Levei algum tempo para perceber que não é este o caso. Estava habituado a pensar que os professores de Matemática estavam todos a ensinar a mesma disciplina, uns melhor do que outros.

Acredito, agora, que *existem, efetivamente, duas disciplinas diferentes a serem ensinadas sob o mesmo nome, ‹Matemática›*. A ser verdade, esta diferença tem muito mais importância que quaisquer diferenças nos programas, que são tão amplamente discutidos. Deste modo, gostaria de realçar o meu ponto de vista com a ajuda de outra analogia.

Imaginemos dois grupos de alunos a quem é ensinada Música como uma disciplina de lápis e papel. A ambos é dada a conhecer a pauta de cinco linhas, com a clave de sol no início, e aprendem que as figuras musicais marcadas nas linhas correspondem às notas mi, sol, si, ré, fá.[1] As figuras musicais marcadas entre as linhas correspondem às notas fá, lá, dó, mi. Aprendem, também, que uma figura musical constituída por uma oval aberta com haste é designada por mínima, valendo esta por duas figuras musicais com uma oval fechada a preto com haste, designadas por semínimas, ou por quatro figuras musicais de oval fechada a preto, com haste e colchete, designadas por colcheias, e por aí em diante — tabuadas de multiplicação musical, se assim preferir. Num dos grupos de crianças, toda a sua aprendizagem é deste tipo e nada para além disso. Se estas crianças tiverem uma aula de Música por dia, cinco vezes por semana em horário escolar, e lhes for dito que essas aulas são, de facto, importantes, com o passar do tempo, provavelmente aprenderão a escrever na pauta as figuras musicais de melodias simples tais como *God Save the Queen* e *Auld Lang Syne*, bem como resolver problemas simples do género ‹Em que compasso está?›, ‹Qual a sua tónica?› e, até mesmo, ‹Transporte esta melodia de dó maior para lá maior.› Achá-lo-iam maçador e as regras que teriam que memorizar seriam tantas que desafios tais como ‹Escreva um acompanhamento simples para esta melodia› seria demasiado difícil para a maioria. Desistiriam da disciplina assim que possível e lembrar-se-iam da mesma com aversão.

Ao outro grupo de crianças é-lhes ensinada a associação de diversos sons às figuras musicais na pauta. Durante os primeiros anos estes são sons audíveis, que elas próprias constroem a partir de simples instrumentos. Depois de algum tempo conseguem, ainda, recordar esses sons sempre que leem ou escrevem as respetivas figuras musicais na pauta. Associada a cada sequência de figuras musicais está uma melodia e por cada variação vertical uma harmonia. As tónicas dó maior e lá maior têm uma relação audível, e uma relação semelhante pode ser encontrada entre certos pares de tónicas. E assim por diante. Está envolvido muito menos exercício de memória e tudo aquilo que deve ser recordado é, em grande parte, sob a forma de um todo relacionado (como melodias) que as suas mentes retêm facilmente. Exercícios tais como os mencionados anteriormente (‹Escreva um simples acompanhamento›) estariam ao alcance da maioria. Estas crianças achariam o seu processo de aprendizagem intrinsecamente prazeroso e muitas delas continuá-lo-iam voluntariamente, até para além do 3.º ciclo.

Para o presente propósito criei dois tipos de ‹aulas de Música› inexistentes, ambas com exercícios de lápis e papel (no segundo caso, depois do primeiro ou do segundo ano). Mas a diferença entre essas atividades imaginárias não é maior do que aquela que existe entre duas atividades que decorrem sob o nome de Matemática. (Podemos tornar a analogia mais próxima, ao imaginarmos que ao primeiro grupo de crianças é inicialmente ensinado um conjunto de sons correspondentes às notas musicais, muito embora de forma desanimadora e na qual as associações se encontram malformadas e desorganizadas para perdurarem.)

A analogia acima é, de forma clara, fortemente tendenciosa em favor da Matemática relacional. Isto reflete o meu próprio ponto de vista. Contudo, para lhe chamar um ponto de vista, implica que eu a deixe de considerar como uma verdade evidente por si mesma, que não requer qualquer justificação: o que dificilmente pode ser se muitos professores experientes continuarem a ensinar Matemática instrumentalmente. O próximo passo é tentar discutir o valor de ambos os pontos de vista, de forma tão clara e justa quanto possível; e, especialmente, do ponto de vista oposto ao nosso. É por isso que a próxima secção é chamada de Advogado do Diabo[i]. De certa forma, isto apenas descreve a parte que argumenta a favor da compreensão instrumental. Mas também justifica a outra parte, uma vez que um oponente imaginário que pense de forma diferente da nossa, constitui um bom instrumento para nos esclarecer porque pensamos desta maneira.

Nota

[i] No próximo número retomamos a publicação deste texto, onde se inclui a secção aqui referida pelo autor.

Richard R. Skemp
Departamento da Educação
Universidade de Warwick, Reino Unido

ESTATUTO EDITORIAL DA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA

A *Educação e Matemática* (EM) é uma publicação periódica da Associação de Professores de Matemática (APM). A sua periodicidade atual é de cinco números anuais, sendo um deles temático e duplo. A revista aborda questões relacionadas com o ensino e aprendizagem da Matemática. Dirige-se aos professores de Matemática, de todos os níveis de ensino, em especial aos sócios da APM, constituindo um meio de comunicação privilegiado da Associação, em Portugal e no estrangeiro. Os principais objetivos da *Educação e Matemática* são:

- Promover a troca de ideias e experiências entre professores;
- Estimular a reflexão sobre problemas e desafios da educação matemática;
- Discutir temas atuais e importantes da educação matemática e da educação em geral;
- Fornecer elementos de trabalho para as práticas dos professores;
- Divulgar informação relevante para os professores.

A *Educação e Matemática* publica textos de natureza diversa. Vive muito da contribuição dos sócios, que são autores da maior parte dos artigos. Estas contribuições passam por ideias, pontos de vista, comentários, relatos de experiências, artigos de opinião, recensões de livros, resolução de problemas, notícias ... . A EM tem um conjunto de secções de natureza diversificada, algumas das quais com caráter permanente. A revista tem uma equipa redatorial a quem compete desenvolver todo o trabalho de receção e revisão de artigos, bem como organizar a própria revista. À semelhança das outras revistas informativas, a *Educação e Matemática* assegura o respeito pelos princípios deontológicos e pela ética profissional dos jornalistas, assim como pela boa fé dos leitores.

A Diretora da *Educação e Matemática*