Frações harmónicas

Uma das séries mais famosas é a harmónica:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

A série, embora cresça cada vez mais lentamente, é divergente, isto é, ultrapassa qualquer valor que se queira e o seu limite é $+\infty$. Vamos usar apenas alguns elementos desta série, não obrigatoriamente consecutivos, de modo que a sua soma seja exatamente igual a 3.

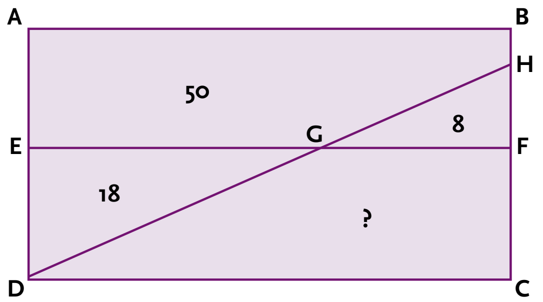
Qual é o número mínimo de frações que temos de usar?

(Respostas até 25 de abril para zepaulo46@gmail.com)

ÁREA PERDIDA

O problema proposto no número 134 de Educação e Matemática foi o seguinte:

A Ana Filipa desenhou um retângulo ABCD. Depois, traçou o segmento EF, paralelo ao lado AB, e o segmento DH, tal como se vê na figura.



A seguir, começou a medir as áreas das várias regiões em que o retângulo ficou dividido.

O pentágono ABHGE tinha 50 cm², o triângulo DEG media 18 cm², e o FGH 8 cm².

Faltava-lhe calcular a última quando a interromperam.

Qual é então a área do trapézio CDGF?

Recebemos 15 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Andreia Hall, Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Edgar Martins (Queluz), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, Ilca Cruz, José Paulo Coelho (Moura), Laura Almeida, Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e de um grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

O Edgar afirma logo no início: «Este foi fácil».

Todas as resoluções enviadas começam por constatar que os triângulos DEG e FGH são semelhantes por ambos terem um ângulo reto e os ângulos de vértice G serem verticalmente opostos.

Sendo semelhantes os triângulos, a razão entre as suas áreas é o quadrado da razão de semelhança r:

$$r^2=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \quad \text{ou} \quad r=\frac{3}{2}$$

Logo

$$\overline{EG}=\frac{3}{2}\overline{GF} \quad \text{e} \quad \overline{ED}=\frac{3}{2}\overline{HF}$$

A partir daqui, apareceram duas vias de resolução.

1) Alice, Carlos, Edgar, Francisco e Ilca

Os triângulos CDH e FGH são semelhantes.

Como

$$\overline{DC}=\overline{EF}=\overline{EG}+\overline{GF}=\frac{5}{2}\overline{GF},$$

a razão de semelhança é 5/2. Portanto:

$$\text{Área}_{CDH}\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\text{Área}_{FGH}=\frac{25}{4}\times 8=50$$

Então,

$$\text{Área}_{CDGF}=\text{Área}_{CDH}-\text{Área}_{FGH}=50-8=42\text{ cm}^2.$$

2) Alberto, Andreia, Catarina, Graça, Hugo, José Paulo, Laura, Mário, Pedrosa e grupo de Paião

Começa-se por dividir o trapézio num retângulo e num triângulo, traçando a linha GP paralela a FC.

Os triângulos PDG e DEG são congruentes.

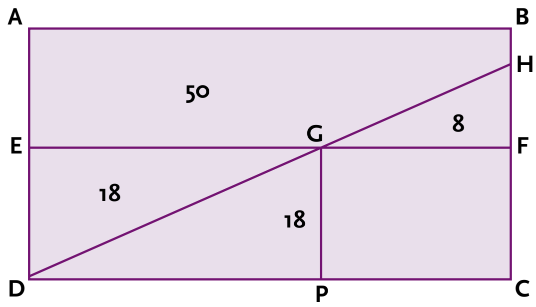
O retângulo DEGP tem área 36 cm².

Os retângulos GFCP e DEGP têm a mesma altura mas a base do primeiro é 2/3 da do segundo. Logo, a área do primeiro é também 2/3 da do segundo:

$$\text{Área}_{GFCP}\ \frac{3}{2} \times 36 = 24$$

Portanto

$$\text{Área}_{CDGF} = 18 + 24 = 42 \text{ cm}^2.$$



E a Laura termina assim:

A área procurada é sempre 42 cm², independentemente da área do pentágono ser ou não 50.