(Re)criação de materiais manipuláveis para o ensino-aprendizagem das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo no 5.º ano de escolaridade do Ensino Básico

Sara Ribeiro
Pedro Palhares

Introdução

De acordo com os documentos curriculares nacionais de referência para a disciplina de Matemática no Ensino Básico, designadamente o Programa de Matemática para o Ensino Básico (MEC, 2013) e as Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico (MEC, 2012), a abordagem do conteúdo área, integrada no domínio Geometria e Medida, é realizada ao longo dos diferentes anos de escolaridade do Ensino Básico. De facto, o estudo deste conteúdo não se circunscreve a nenhum ano de escolaridade, nem mesmo a nenhum ciclo de ensino, pelo que o tópico em questão vai sendo, logo desde o 1.º ano de escolaridade, progressivamente, retomado e (re)construído.

Segundo Battista (2007), uma compreensão genuína da medição da área implica compreender diferentes aspetos, a saber: o que é o atributo área e como é que este se comporta (isto é, conservá-lo quando ele é movido e decomposto/recomposto); como é que a área é medida através da repetição de unidades de área; como é que os procedimentos numéricos podem ser utilizados para determinar a área para conjuntos de formas geométricas específicas; e como é que esses procedimentos numéricos são representados com palavras e algebricamente.

No que concerne aos procedimentos numéricos e fórmulas, adensa-se a ideia de que estes devem suceder-se a um conhecimento conceptual sólido dos alunos relativamente ao atributo mensurável em questão. A este respeito, o NCTM (2007) declara que, independentemente do nível de ensino, os alunos deverão possuir uma multiplicidade de experiências informais na compreensão dos atributos mensuráveis, antes de utilizarem instrumentos para os medirem ou de recorrerem a fórmulas para os calcularem. Também Wilson e Rowland (1993) evidenciam que as fórmulas devem advir do desenvolvimento conceptual e não devem ser enfatizadas até ao 4.º ano de escolaridade.

Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999) salientam que «as fórmulas e os procedimentos para determinar medidas devem surgir da exploração de situações concretas» (p. 77). Para o NCTM (1991), «Através das suas explorações, os alunos devem desenvolver procedimentos multiplicativos e fórmulas para determinação de medidas. O currículo deve incidir no desenvolvimento da compreensão, e não na memorização rotineira de fórmulas» (pp. 138–139). A estas considerações, o NCTM (2007) acrescenta: «Mesmo aquelas fórmulas, cuja justificação rigorosa, para os alunos (…), se revela difícil (…), devem ser abordadas de modo que os alunos possam desenvolver um sentido intuitivo da sua plausibilidade.» (p. 286).

Tendo presente que «Nos primeiros níveis de aprendizagem, (…) o concreto refere-se de um modo geral ao que é manipulável» (Palhares & Gomes, 2006, p. 11), então, o uso de materiais manipuláveis parece adquirir, nos respetivos anos de escolaridade, verdadeira importância, «como meio facilitador de uma aprendizagem significativa de diversos conceitos e relações matemáticas» (Oliveira, 2008, p. 25). No fulcro desta consideração reside a ideia de Bruner (2011), segundo o qual «é inútil tentar apresentar explicações formais baseadas numa lógica distante do modo de pensar da criança e cujas implicações ela não alcança» (p. 57).

Como escreve Serrazina (1990), diferentes teorias psicopedagógicas asseguram que as crianças necessitam de modelos concretos para compreenderem os conceitos matemáticos. Também variadas investigações têm constatado que os alunos que utilizam materiais manipuláveis na construção de conceitos obtêm melhores resultados do que aqueles que não o fizeram, uma vez que os alunos são indivíduos ativos, que constroem, modificam e integram ideias ao interagirem com o mundo físico. Na ótica da autora, «A aprendizagem baseia-se na experiência e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer envolvimento activo do aluno e que vai progredindo do concreto para o abstracto» (p. 1). Contudo, Serrazina (1990) esclarece que a utilização de muitos materiais, por si só, não garante uma aprendizagem significativa. Deste modo, qualquer material deve ser aplicado cuidadosamente, sendo o papel do professor de crucial importância neste processo: cabe-lhe decidir *como*, *quando* e *porquê* determinado material deve ser utilizado. Ora, mais importante do que os materiais que o aluno está a explorar, é a experiência que o mesmo concretiza. Quando se propugna a ideia de que a Matemática se aprende fazendo, o que está em causa não é somente a atividade física, mas, principalmente, a atividade mental que reflete a atividade matemática.

Conforme Hartshorn e Boren (1990), a investigação sugere que o uso de materiais manipuláveis é particularmente útil para auxiliar os alunos a moverem-se do nível concreto para o nível abstrato. Contudo, os professores devem escolher, cuidadosamente, as tarefas e os materiais que suportam a introdução de símbolos abstratos. Ponte e Serrazina (2000) declaram que os conceitos e as relações matemáticas são, efetivamente, entes abstratos. Todavia, estes podem encontrar representações em variados tipos de suportes físicos. Assim, «Convenientemente orientada, a manipulação de material pelos alunos pode facilitar a construção de certos conceitos. Pode também servir para representar conceitos que eles já conhecem por outras experiências e actividades, permitindo assim a sua melhor estruturação» (p. 116). Neste sentido, os autores realçam que o trabalho dos alunos com materiais manipuláveis é essencial em todos os domínios da Matemática, uma vez assegurado que estes materiais são, de facto, utilizados pelos alunos e que estes últimos compreendem, realmente, a tarefa para a qual é suposto utilizarem o material. De facto, «É tão ineficaz ser o professor a usar o material, com o aluno a ver, como ter o aluno a mexer no material sem saber o que está a fazer» (p. 116). Nesta ordem de ideias, afirmam Abrantes *et al.* (1999), «O recurso aos materiais manipuláveis (...) é imprescindível como ponto de partida ou suporte de muitas tarefas escolares. Mas trata-se de um meio e não de um fim; o essencial está na natureza da actividade intelectual dos alunos» (p. 25).

Finalizando, o NCTM (2014) preconiza que um Programa de Matemática excelente deve integrar a utilização de instrumentos matemáticos, como são, por exemplo, os materiais manipuláveis: «*Students at all grade levels can benefit from the use of physical and virtual manipulative materials to provide visual models of a range of mathematical ideas*» (p. 82). Todavia, o valor desses materiais manipuláveis, uma vez aplicados na sala de aula, depende do facto de os alunos se conseguirem apropriar dos mesmos de uma forma que promova o raciocínio matemático, o estabelecimento de significado e a comunicação.

A fórmula para a área do paralelogramo

O ensino-aprendizagem da fórmula para a área do paralelogramo teve como suporte a exploração de um material mecânico (ver figura 1), que foi (re)criado a partir de um mecanismo pré-estruturado da autoria de Van der Meer e Gardner (1994). Em concordância com estes autores, o mecanismo referenciado possibilita a abordagem da fórmula

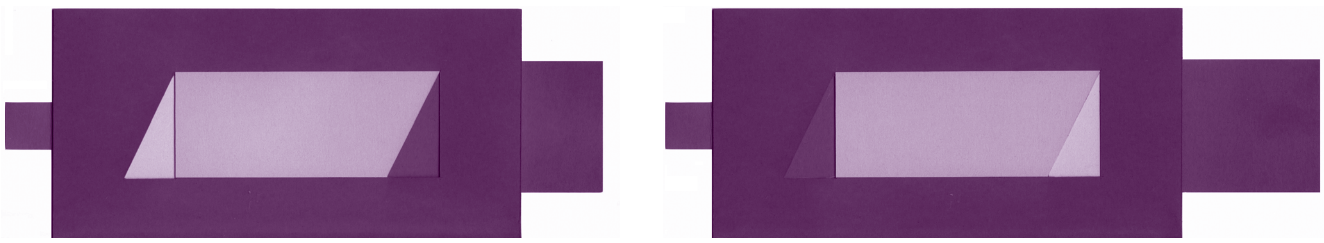

Figura 1.— Material mecânico (re)criado para o ensino-aprendizagem da fórmula para a área do paralelogramo.

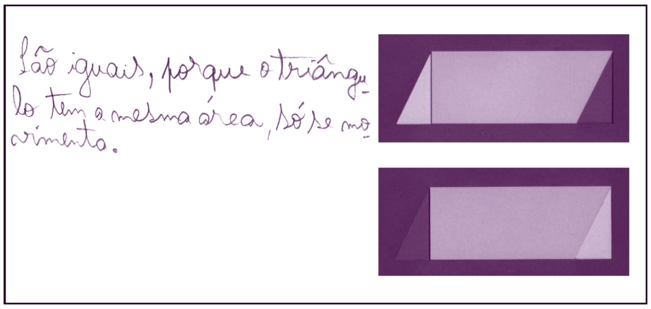

Figura 2.— Resolução de um aluno (JC) na segunda tarefa.

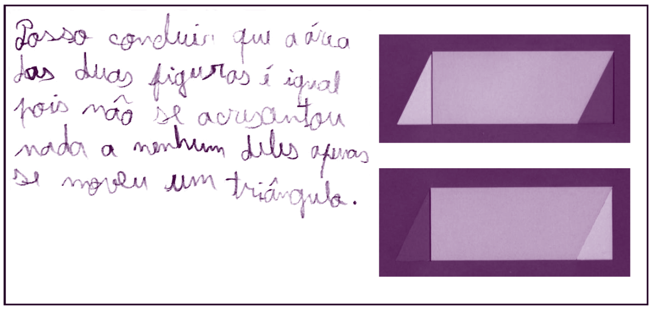

Figura 3.— Resolução de um aluno (GR) na segunda tarefa.

para a área do paralelogramo, tendo subjacente a concretização de que se pode construir, a partir deste, um retângulo com a mesma área. Ora, este é o propósito que estará na base da construção da fórmula para a área do paralelogramo pelos alunos, organizados em pequenos grupos.

Distribuiu-se aos alunos o material mecânico tendente à investigação da fórmula para a área do paralelogramo e a ficha de trabalho, que contemplava três tarefas matemáticas. Inicialmente, os alunos desenvolveram, espontaneamente, um contacto intuitivo com o material mecânico, observando-o e explorando-o livremente. Depois, focalizaram a sua atenção no paralelogramo presente no material, o qual conseguiram identificar com facilidade.

Na primeira tarefa, os alunos deviam movimentar a tira do material mecânico e indicar a figura obtida. Nesta, os alunos utilizaram, espontaneamente, o movimento permitido pelo material mecânico para transformarem o paralelogramo presente no material mecânico num retângulo. A identificação desta última figura geométrica constituiu-se acessível para todos os grupos da turma.

Na segunda tarefa, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores. Nesta, todos os grupos da turma, de um modo geral, determinaram, sem dificuldades, que a área do paralelogramo e do retângulo era igual e que, portanto, as figuras eram equivalentes. Ora, o movimento horizontal reversível do triângulo presente no material mecânico, que permitia visualizar, ora um paralelogramo, ora um retângulo (que é também um paralelogramo), constituiu um suporte essencial para a estruturação desta conclusão pelos alunos (ver figuras 2 e 3). De salientar que os alunos de um grupo mediram, com a régua, os lados do triângulo que surgia do lado esquerdo do material, compondo o paralelogramo, e os lados do triângulo que surgia do lado direito do material, formando o retângulo, e, com estas medidas, comprovaram a congruência dos três lados em ambos os triângulos, o que lhes permitiu, de uma forma conceptualmente correta (baseada nos critérios de congruência de triângulos), concretizarem a ideia de que o triângulo que surgia do lado esquerdo era geometricamente igual ao triângulo que surgia do lado direito, tal como sugeria o movimento do triângulo permitido pelo material.

Finalmente, na terceira tarefa, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do paralelogramo, a partir da exploração realizada. Nesta, a generalidade dos grupos conseguiu construir corretamente a fórmula para a área do paralelogramo. Para a construção desta fórmula, os alunos, suportados na possibilidade de transformação, através do material mecânico, do paralelogramo num retângulo com a mesma área, estabeleceram uma correspondência entre a base e a altura do paralelogramo — indicadas na figura presente na tarefa — e o comprimento e a largura do retângulo, respetivamente.

Neste sentido, os alunos revelaram uma apropriação plena e significativa do sentido das tarefas desenvolvidas ao longo da ficha de trabalho. De facto, eles fundamentaram-se na exploração das tarefas realizadas até ao momento com base no material mecânico para construírem, corretamente, a fórmula para a área do paralelogramo. A maioria dos grupos, a par de escrever a fórmula, calculou a área do pa-

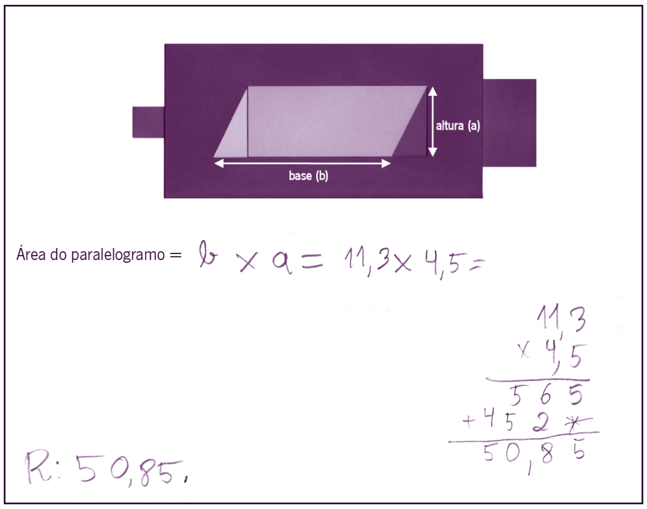

Figura 4.— Resolução de um aluno (JC) na terceira tarefa.

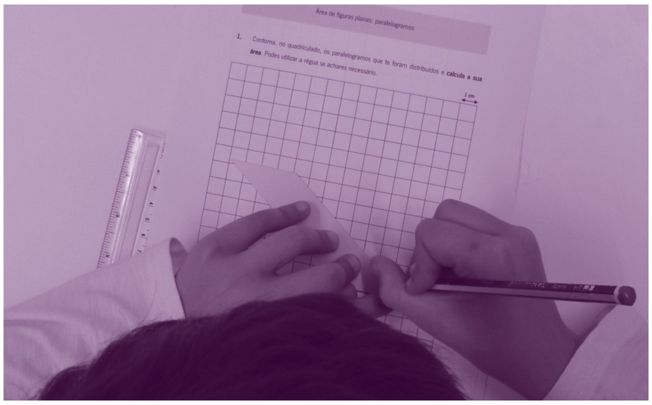

Figura 5.— Exploração de um aluno (AS) na quarta tarefa.

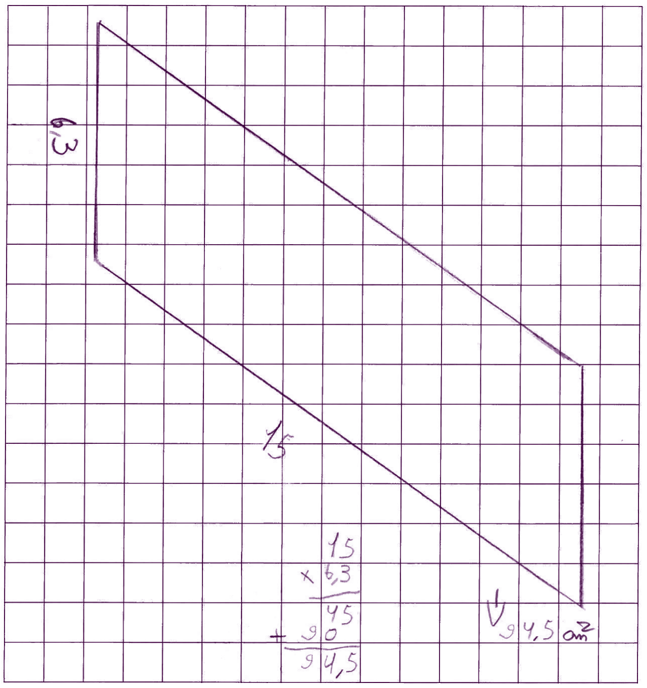

Figura 6.— Resolução de um aluno (RM) na quarta tarefa.

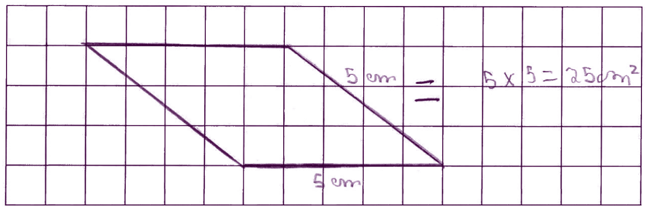

Figura 7.— Resolução de um aluno (AS) na quarta tarefa.

ralelogramo presente no material (ver figura 4), utilizando a régua para medir a base e a altura do mesmo.

No final, foi promovido um momento de discussão/reflexão em plenário acerca das tarefas matemáticas desenvolvidas.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos um conjunto de paralelogramos, feitos em cartolina, e a ficha de trabalho, que contemplava uma tarefa matemática. Nesta quarta tarefa, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, os paralelogramos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área (ver figura 5).

Os alunos dos grupos confundiram, em pelo menos um dos paralelogramos, a altura do paralelogramo relativamente a um dado lado, designado base, com um dos dois lados consecutivos a esta base, calculando incorretamente a sua área (ver figuras 6 e 7). Esta fragilidade corresponde a uma das três ideias erróneas dos alunos assinaladas nos resultados do estudo de Cavanagh (2008), a qual foi visível, segundo o autor, no cálculo da área de triângulos retângulos, mas, especialmente, de paralelogramos.

No final, foi desenvolvido um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da tarefa matemática desenvolvida.

A fórmula para a área do triângulo

O ensino-aprendizagem da fórmula para a área do triângulo teve como suporte a exploração de um material mecânico (ver figura 8), que foi criado originalmente. O material mecânico referenciado possibilita a abordagem da fórmula para a área do triângulo tendo subjacente a concretização de que se pode construir, a partir do mesmo, um paralelogramo com o dobro da área do mesmo. Ora, este é o propósito que estará na base da construção, da fórmula para a área do triângulo, pelos alunos, organizados em pequenos grupos.

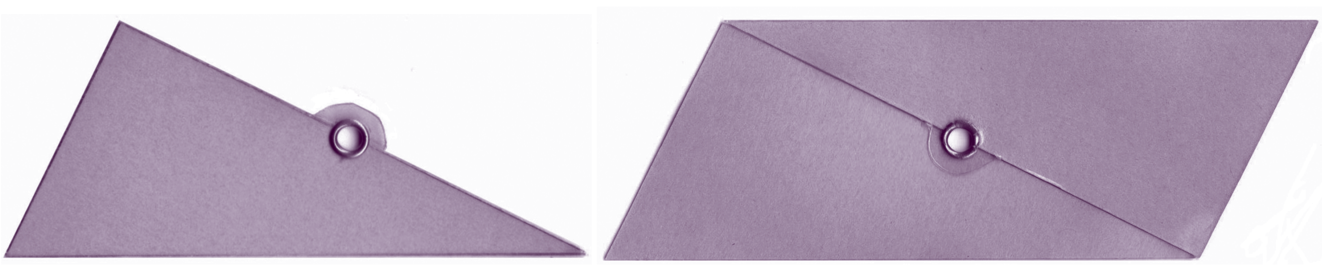

Figura 8.— Material mecânico criado para a abordagem da fórmula para a área do triângulo.

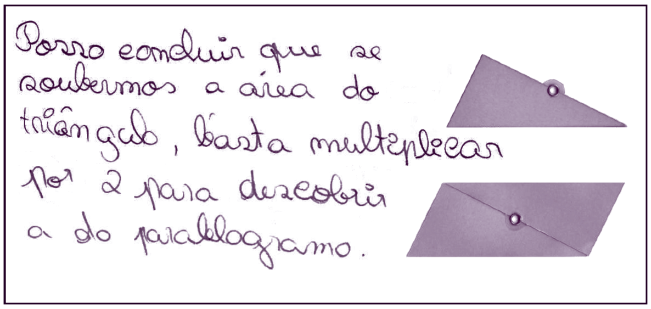

Figura 9.— Resolução de um aluno (SC) na segunda tarefa.

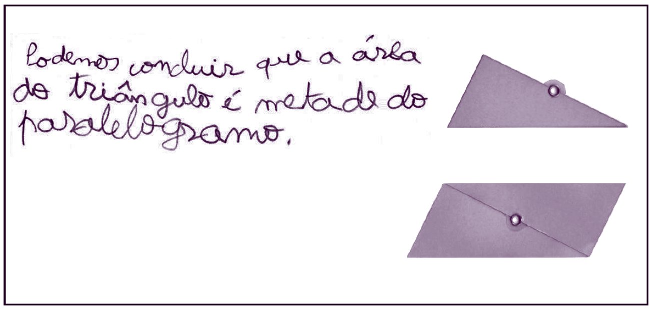

Figura 10.— Resolução de um aluno (MJ) na segunda tarefa.

Distribuiu-se aos alunos o material mecânico tendente à investigação da fórmula para a área do triângulo e a ficha de trabalho, que contemplava três tarefas matemáticas.

Inicialmente, os alunos desenvolveram, espontaneamente, um contacto intuitivo com o material mecânico, observando-o e explorando-o livremente. Depois, focalizaram a sua atenção nos dois triângulos sobrepostos que compunham o material, os quais conseguiram identificar com facilidade.

Na primeira tarefa, os alunos deviam rodar um desses triângulos meia-volta em torno do ilhó, e indicar a figura então obtida. Nesta, os alunos utilizaram, espontaneamente, o movimento permitido pelo material mecânico para rodarem um dos triângulos meia-volta em torno do ilhó e, dessa forma, formarem um paralelogramo. No que concerne à identificação do paralelogramo obtido, esta constituiu-se acessível para todos os grupos da turma, que não demonstraram dificuldades no seu reconhecimento.

Na segunda tarefa, os alunos deviam formular conclusões relativamente à área das duas figuras anteriores. Nesta, todos os grupos da turma determinaram com correção que a área do paralelogramo era o dobro da área do triângulo. Ora, o movimento rotacional reversível de meia-volta de um dos triângulos sobrepostos no material mecânico, que permitia visualizar, ora um triângulo, ora um paralelogramo composto por dois triângulos iguais ao anterior, constituiu um suporte basilar para a estruturação desta conclusão por parte dos alunos (ver figuras 9 e 10).

Na terceira tarefa, os alunos deviam escrever a fórmula para a área do triângulo, a partir da exploração realizada. Nesta, todos os grupos, em termos gerais, conseguiram construir corretamente a fórmula para a área do paralelogramo. Para isso, os alunos, ao constatarem, com base no material mecânico, que se podia «construir um paralelogramo decomponível em dois triângulos iguais ao triângulo dado, com a mesma base que este.» (MEC, 2012, p. 34), recuperaram e escreveram, em primeiro lugar, a fórmula para a área do paralelogramo, já abordada. Depois, determinaram, então, que a área do triângulo seria metade da área anteriormente definida (ver figuras 11 e 12), finalizando, com isto, a construção da fórmula. É importante assinalar que a recuperação da fórmula para a área do paralelogramo foi autonomamente conseguida por todos os grupos, ao passo que a determinação de que a área do triângulo correspon-

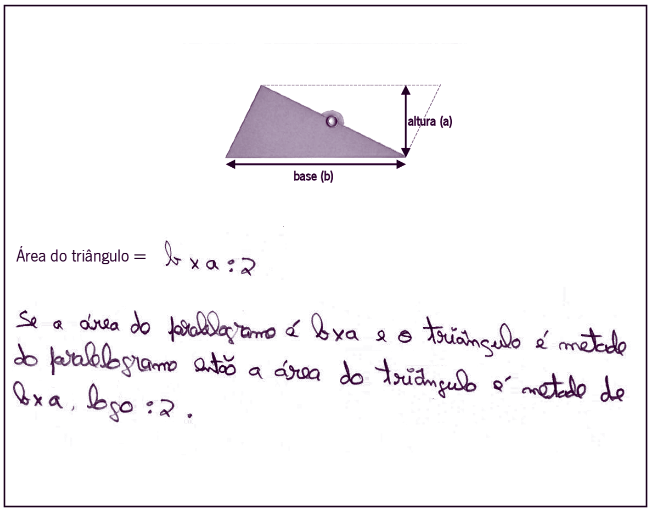

Figura 11.— Resolução de um aluno (PA) na terceira tarefa.

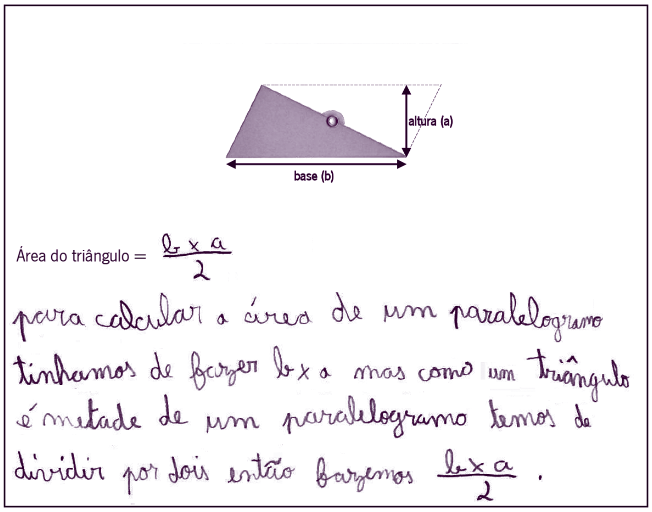

Figura 12.— Resolução de um aluno (AS) na terceira tarefa.

Figura 13.— Exploração de um aluno (AS) na quarta tarefa.

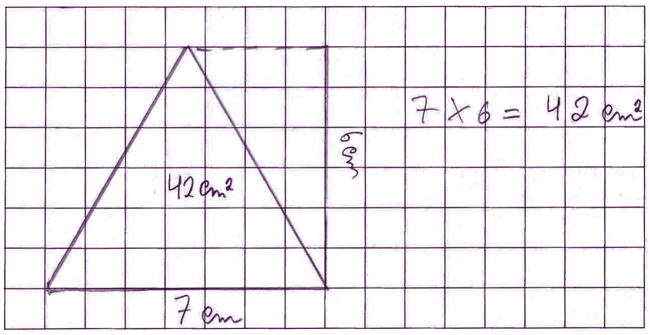

Figura 14.— Resolução de um aluno (JC) na quarta tarefa.

dia, efetivamente, a metade da área do paralelogramo, implicou, em certos grupos, algum apoio e questionamento.

No final, foi desenvolvido um momento de discussão/reflexão em plenário acerca das tarefas matemáticas desenvolvidas.

Posteriormente, distribuiu-se aos alunos um conjunto de triângulos, feitos em cartolina, e a ficha de trabalho, que contemplava uma tarefa matemática. Nesta quarta tarefa, os alunos deviam contornar, em papel quadriculado, os triângulos que lhes foram distribuídos e calcular a sua área (ver figura 13).

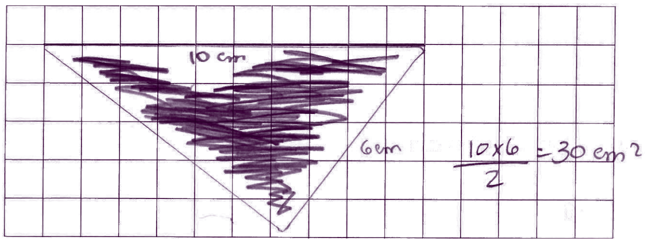

Figura 15.— Resolução de um aluno (MG) na quarta tarefa.

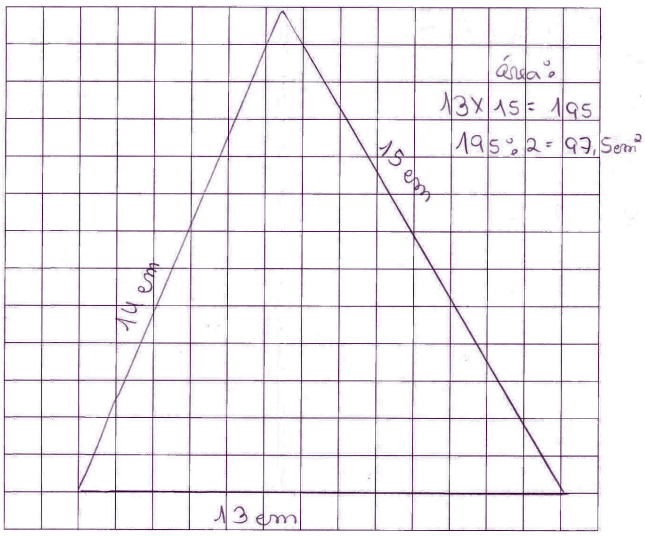

Figura 16.— Resolução de um aluno (MJ) na quarta tarefa.

Alguns alunos dos grupos não dividiram o produto da base e da respetiva altura do triângulo por dois, calculando a área correspondente a um paralelogramo composto por dois triângulos geometricamente iguais ao anterior e com a mesma base que este (ver figura 14). Outros alunos dos grupos confundiram a altura do triângulo relativamente a um dado lado, designado base, com um dos outros dois lados do triângulo (ver figuras 15 e 16), resultando num cálculo incorreto da sua área. Esta última fragilidade é correspondente à verificada no cálculo da área dos paralelogramos pelos alunos. E, finalmente, um aluno confundiu a área dos triângulos e o perímetro dos mesmos (ver figura 17). A par das três fragilidades anteriores, relacionadas com o próprio processo de cálculo da área dos triângulos, os grupos experimentaram dificuldades relacionadas com a diferença dos valores medidos por cada um dos alunos, individualmente, para a base e para a altura dos triângulos, e que resultaram em assimetrias visíveis nos resultados da área dos mesmos.

No final, foi desenvolvido um momento de discussão/reflexão em plenário acerca da tarefa matemática desenvolvida.

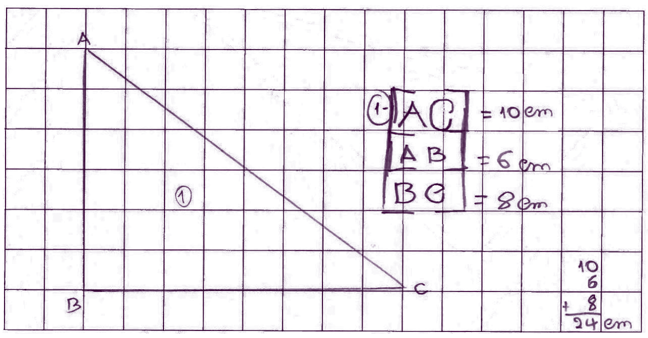

Figura 17.— Resolução de um aluno (MQ) na quarta tarefa.

Reflexões Finais

Os materiais manipuláveis re(criados) para o ensino-aprendizagem das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo revelaram-se suportes proveitosos para a construção autónoma destas fórmulas pelos alunos, favorecidos pelo percurso exploratório desenhado especificamente para os materiais. Na verdade, as experiências de ensino-aprendizagem proporcionadas, ao envolverem e desafiarem intelectualmente os alunos na construção das fórmulas a partir da manipulação do respetivo material, permitiram que eles desenvolvessem «um sentido intuitivo da sua plausibilidade» (NCTM, 2007, p. 286) e, dessa forma, concorreram para uma compreensão das mesmas, indo além da sua simples memorização ou aplicação mecanizada. Apesar disso, este conhecimento, de cariz procedimental, não impediu que, posteriormente, os alunos, em atividades que envolviam a manipulação destas fórmulas para o cálculo da área de paralelogramos e triângulos que lhes foram distribuídos, evidenciassem fragilidades. No entanto, também estas últimas favoreceram uma compreensão mais completa das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo, não ficando, assim, circunscritas à sua construção inicial.

Neste sentido, reforça-se a ideia de que os materiais manipuláveis re(criados) para o ensino-aprendizagem das fórmulas para a área do paralelogramo e do triângulo se constituíram instrumentos didáticos potenciais, que promoveram experiências de aprendizagem criativas e frutuosas. Posto isto, uma recomendação de cariz didático a definir consiste no aproveitamento destes materiais, potencialmente por professores do 1.° e do 2.° Ciclos do Ensino Básico, como auxílio à sua prática pedagógica na sala de aula, mas não como fins em si mesmos. Com efeito, propugna-se a difusão destes materiais pela mais-valia que poderão ser para a comunidade educativa, enquanto instrumentos de suporte salutares à aprendizagem dos alunos.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação — Departamento da Educação Básica.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. 2, pp. 843–908). Charlotte: Information Age Publishing.

Bruner, J. S. (2011). *O Processo da Educação*. Lisboa: Edições 70.

Cavanagh, M. (2008). Area measurement in year 7. *Reflections, 33*(1), 55–58. Consultado em agosto 16, 2015, em http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/secondary/mathematics/assets/pdf/s4_teach_ideas/area/area_meas.pdf.

Hartshorn, R., & Boren, S. (1990). *Experiential Learning of Mathematics: using manipulatives*. ERIC Digest. Consultado em setembro 18, 2015, em http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED321967.pdf.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2012). *Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Ministério da Educação e Ciência [MEC] (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação em Matemática Escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (1.ª ed.). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2014). *Principles to Actions: ensuring mathematical success for all*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Palhares, P., & Gomes, A. (2006). A formação em Matemática para professores do 1.° Ciclo — em que bases nos podemos apoiar?. In P. Palhares, & A. Gomes (Coords.), *MAT 1C: desafios para um novo rumo* (pp. 9–17). Braga: Universidade do Minho - Instituto de Estudos da Criança.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.° Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.

Serrazina, L. (1990). Os Materiais e o ensino da Matemática. *Educação e Matemática*, (13), 1. Consultado em setembro 18, 2015, em http://www.apm.pt/files/_EM13_pp01_4d6bd9e8e8334.pdf.

Van der Meer, R., & Gardner, B. (1994). *The maths pack is like no other book you have ever seen*. London: Jonathan Cape.

Wilson, P. S., & Rowland, R. E. (1993). Teaching Measurement. In R. J. Jensen (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: early childhood mathematics* (pp. 171–194). New York: Macmillan.

Sara Ribeiro

Pedro Palhares

CIEC, Instituto de Educação, Universidade do Minho