

# Calculadoras gráficas — mais um desafio para renovar os currículos de Matemática

Graciosa Veloso

Os instrumentos tecnológicos, como o computador e a calculadora, vêm possibilitar novas formas de explorar conceitos fundamentais, vêm revalorizar os processos de compreensão, de análise crítica, secundarizando as técnicas de cálculo. As calculadoras gráficas poderão ser mais um desafio da mudança em que o professor e os alunos são protagonistas vitais.

Não creio que nem a qualidade nem a quantidade de ideias e projectos que temos, nasçam por geração espontânea e como uma actividade meramente individual. Provavelmente o prazer que se tem, as contradições que se experimentam, os compromissos que se fazem, as relações que se estabelecem, a forma como se vive todo o processo de gestação das coisas, será único para cada pessoa. Mas, tudo tem uma história, que embora colectiva, não abdica da participação de cada um(a), por mais constrangimentos que sintamos ou nos queiram fazer sentir.

Mas que tem isto a ver com o título do artigo? A razão é que sinto que provavelmente não escreveria este texto, se não fosse a experiência, para mim importantíssima, que há já algum tempo tenho vivido. Um programa de formação de professores com utilização educativa de calculadoras e folha de cálculo desenvolvido com colegas no ano lectivo passado, foi uma oportunidade única de reflexão e aprendizagem; o mestrado foi espaço de reflexão distanciada e balanço da experiência profissional, de estudo e confronto com problemáticas no campo da educação matemática, foi oportunidade de iniciar uma experiência de investigação em que as Tecnologias de Informação e as suas possíveis implicações no processo de renovação curricular da Matemática têm constituído um desafio em que me tenho encontrado e empenhado com outros.

Neste processo foram inesquecíveis as horas de trabalho com dois colegas, na preparação das acções de formação que dinamizámos no núcleo regional de Lisboa da APM, em 88/89, e da publicação *Calculadoras na Educação Matemática* (edição APM, Setembro 89).

Os Profmat têm constituído também um espaço importante de participação e renovação de ideias e iniciativas. No Projecto Minerva comecei a utilizar processamento de texto com o apoio de uma aluna que pertencia ao núcleo da escola onde então trabalhava. Foi neste Projecto também, que comecei a pensar e a organizar actividades que propus aos alunos com utilização do computador. Foram pelo menos estas experiências e vivências recordadas que me ajudaram a solidificar algumas das convicções que actualmente balizam o meu jeito de intervir no colectivo da educação matemática. Assim, as preocupações educativas que orientam a minha participação no processo de renovação curricular da Matemática são basicamente as seguintes:

(a) É necessário e possível transformar a situação de crise do ensino da Matemática.

(b) *Todos os alunos* podem aprender e cada um é construtor das suas aprendizagens.

(c) A Matemática é uma ciência cuja história e finalidade é contribuir para o desenvolvimento humano e social. As aplicações da Matemática e a resolução de problemas são causa e efeito do desenvolvimento desta ciência.

(d) A intuição, a tentativa e erro são capacidades a utilizar nos processos de descoberta, de conjectura matemática.

(e) A exploração de situações problemáticas é um processo em que naturalmente para além de se tentarem respostas, se formulam questões.

(f) Quando se reconhece uma relação, se estabelece uma conjectura, se chega a uma conclusão, está em presença um encadeado de argumentos que contribui para o desenvolvimento de um

pensamento crítico e independente.

(g) A natureza da Matemática e a da aprendizagem têm semelhanças suficientes que à primeira vista levariam a estranhar a situação pouco animadora do ensino da Matemática.

(h) O professor de Matemática é um orientador das aprendizagens dos alunos, preocupado com a organização de um ambiente agradável e estimulante. O professor faz parte de um grupo que dispõe de instrumentos vários para fazer Matemática. As aulas de Matemática são espaços em que a experimentação, a tentativa e o erro são elementos constitutivos do processo de trabalho em que cada grupo e cada um tem papel activo e responsável. O professor de Matemática está em formação permanente, com(o) os outros professores, porque gosta de aprender, gosta de aceitar desafios, a resolução de problemas é um bom exemplo e ... cada vez quer recuperar mais do prazer que não teve quando foi ensinado.

(i) As propostas de utilização do computador e da calculadora neste quadro de referência mobilizam esforços significativos nas áreas de formação de professores e de inovação curricular.

### **Renovação do ensino da Matemática e Tecnologias de Informação**

Ao procurar rever em publicações nacionais relativas à Educação Matemática destes últimos cinco anos, o que se discutia, o que se comunicava como fruto da experiência e propunha ao nível da renovação do ensino da Matemática, compreendi que quanto à utilização do computador e da calculadora há actualmente três linhas de orientação fundamentais com as quais sinto bastantes afinidades: (a) a participação activa dos alunos no processo de aprendizagem, o desenvolvimento do gosto pela actividade matemática, nomeadamente no apreço da ciência e das suas relações com a realidade; (b) uma concepção da Matemática como uma ciência cuja dimensão social tem de implicar mudanças significativas a nível curricular, onde a resolução de problemas será o núcleo central de organização e de de-

envolvimento; (c) a importância da formação contínua dos professores, encarada como um processo em que cada um é profundamente envolvido como protagonista dos projectos educativos que vai (re)criando com outros parceiros no processo de formação (Projecto Minerva, 1990).

No segundo Encontro Nacional de Professores de Matemática, promovido pela APM, Ponte (1986), em documento sobre a evolução da Educação Matemática em Portugal, coloca o computador e a calculadora como instrumentos poderosos e estimulantes no processo de construção do conhecimento e recomenda o estudo dos impactos da sua utilização educativa.

Fonseca (1987), explica o funcionamento de uma Folha de Cálculo Electrónica e propõe actividades em que se revelam potencialidades educativas importantes deste programa.

Moreira (1989), estudou as implicações da utilização da folha de cálculo electrónica no desenvolvimento das capacidades de formular e resolver problemas, com alunos do 6º ano de escolaridade. Entre as conclusões explicitadas é reconhecida a importância da folha de cálculo como ferramenta na descoberta de regularidades e na resolução de problemas por tentativa e erro.

Carreira & Tomé (1989), utilizaram sistematicamente a folha de cálculo electrónica na exploração de situações problemáticas durante um ano lectivo com alunos do 11º ano. Foi ultrapassada a expectativa das professoras, na medida em que a análise de dados por via numérica e gráfica estimularam entusiasticamente os alunos em investigações matemáticas.

Silva (1989), reafirma a importância da participação do aluno no processo de resolução de problemas, servindo a calculadora não só como instrumento de cálculo mas como um contributo para a exploração de situações mais ligadas à realidade.

Para além desta breve revisão senti uma certa curiosidade por procurar o que se tinha já produzido anteriormente a estes últimos cinco anos. Das leituras que fiz, pareceu-me que as propostas de

utilização do computador e da calculadora, como instrumentos de mudança do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, que em Portugal começaram a ser feitas com maior incidência nos últimos cinco anos, articulam-se com propostas de renovação curricular iniciadas no país, no princípio da década de 80. Até aqui, o ensino praticado era essencialmente o do movimento conhecido por Matemática Moderna, lançado a partir de 1960 e caracterizado pela rigidez dos métodos associada a uma concepção da Matemática como ciência profundamente formal e estruturada.

St. Aubyn (1981), apresenta como causas importantes do "relativo insucesso" deste movimento, o carácter predominantemente dedutivo do ensino da disciplina, e a não participação dos professores dos graus de ensino não superior na formulação das propostas contidas na reforma da Matemática Moderna. Em 1981 a SPM publicou um documento que analisa e critica os programas pelo seu carácter formal, rígido, desligado da realidade e omitindo as aplicações. Ponte (1981), propõe as aplicações da Matemática como uma componente importante do ensino da Matemática, invocando como principais razões a natureza marcadamente social, o carácter evolutivo e dinâmico desta ciência, a par de uma concepção de aprendizagem centrada no aluno. Prosseguindo estas ideias, Abrantes & Ponte (1982), propõem como principais preocupações metodológicas para o ensino da Matemática a resolução de problemas. Os principais argumentos utilizados são o desenvolvimento de (a) capacidades de interpretar, analisar e decidir; (b) atitudes de curiosidade e gosto pelo pensamento independente.

### **Calculadora Gráfica**

O estudo das funções é já um conteúdo clássico dos currículos de Matemática. Continua claramente a ser um conteúdo importante, nomeadamente a nível do ensino secundário. Mas os instrumentos tecnológicos, como o computador e a calculadora vêm possibilitar novas formas de explorar con-

ceitos fundamentais, vêm revalorizar os processos de compreensão, de análise crítica, secundarizando as técnicas de cálculo. As calculadoras gráficas poderão ser mais um desafio da mudança em que o professor e os alunos são protagonistas vitais.

### Que potencialidades tem uma calculadora gráfica?

As calculadoras gráficas são máquinas que facilmente fazem traçado de gráficos e permitem fazer estudos quer localizados, quer globais da função a que cada gráfico corresponde. São programáveis, com regras de programação geralmente simples e permitem também trabalhar as funções estatísticas e gráficos associados mais utilizados.

As calculadoras fazem já parte dos materiais utilizados em escolas do ensino básico e secundário, sendo encarecidas e utilizadas de par com outros instrumentos, como computadores, livros, materiais de desenho, audio-visuais, por exemplo.

Embora o custo de uma calculadora gráfica seja mais elevado que o de uma

científica simples, este facto não inviabilizará certamente a possibilidade da sua aquisição, dadas as suas potencialidades e as hipóteses que o mercado oferece.

Não pode ser ignorada a existência da calculadora, nomeadamente porque as suas capacidades gráficas constituirão motivo para reflexão e questionamento de concepções curriculares em que as técnicas de cálculo, numérico e algébrico, hegemonomizam o processo de ensino da Matemática.

**A calculadora gráfica é uma ferramenta para a resolução de problemas e para a exploração de conceitos.**

Fomentar e desenvolver o gosto pela Matemática, e a capacidade de resolver problemas, são objectivos para os quais a utilização da calculadora gráfica se revela adequada. As metodologias a adoptar devem contemplar propostas de actividades e materiais que vão de encontro ao leque diversificado de interesses e processos de trabalhar dos alunos. Toda a gente tem uma preferência por

utilizar a intuição de uma forma mais ou menos geométrica (é bastante comum ouvir-se dizer que um “esquema” ajuda a compreender e a ter ideias para resolver uma situação). A utilização das capacidades gráficas da calculadora pode constituir apoio significativo na resolução de problemas, na construção de conceitos, na descoberta de uma relação, na localização e estimação de raízes de equações ou inequações. As técnicas *zoom-in* e *zoom-out* permitem não só resolver graficamente muitas questões que habitualmente se fazem por processos algébricos, como também explorar novas situações.

A par de outros processos, os de visualização podem facilitar em muitos alunos a actividade de formular questões, estabelecer conjecturas e descobrir conceitos matemáticos importantes.

Analisar uma situação problemática, com recurso a processos geométricos e algébricos contribui com certeza para que o aluno compreenda mais profundamente o problema que está a estudar.

Com os exemplos que apresento de seguida pretendo clarificar o que acabei de referir.

Os problemas de optimização são importantes não só porque traduzem aplicações da Matemática, como porque também constituem propostas para os alunos compreenderem e utilizarem conceitos e processos de raciocínio matemático relevantes. Sem deixar de reconhecer importância à utilização do estudo das funções derivadas em problemas de optimização, nem sempre esta estratégia se revela a mais adequada. Está neste caso a actividade proposta pelo colega José Paulo Viana no nº12 da revista Educação e Matemática, *Um caminho de ferro económico*, (pág. 28/30) – ver caixa.

Calcular a primeira derivada da função é tarefa morosa e sem interesse, que a não se fazer, impede o cálculo dos possíveis zeros.

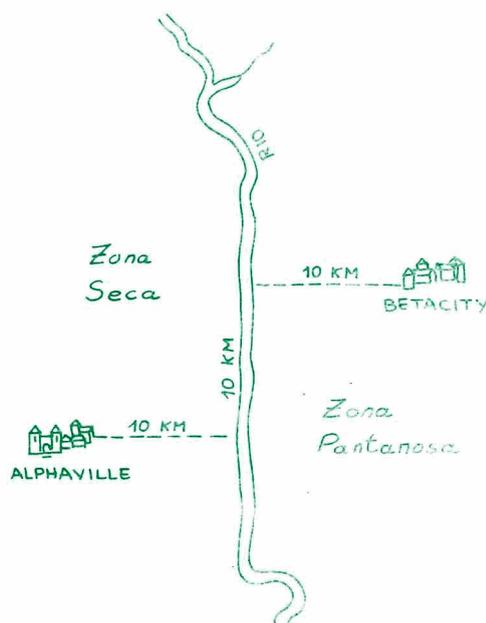
A utilização da calculadora gráfica poderá revelar-se vantajosa, uma vez que o ponto óptimo procurado é facilmente localizável no gráfico correspondente à função que modeliza o preço do custo da construção da linha de caminho

### Um Caminho de Ferro Económico

Um certo rio atravessa uma região em que de um dos lados o terreno é seco enquanto que do outro é pantanoso. Existem na zona duas cidades situadas conforme se indica no mapa da figura ao lado.

Pretende-se construir uma linha de caminho de ferro desde Alphaville até Betacity. O preço de cada quilómetro de via em terreno seco é de 1000 contos, mas na zona pantanosa a construção é  $K$  vezes mais cara.

Descobre, (com aproximação à centésima) em que local a linha deve atravessar o rio de modo que o preço total da obra seja o mais baixo possível”...



de ferro. Estou a pensar nos alunos que escrevem a expressão que traduz o preço da linha de caminho de ferro, em função da localização do ponto de separação dos dois terrenos.

Seria contudo precipitado considerar a proposta aqui apresentada como alternativa à da construção e análise da tabela numérica sugerida pelo Zé Paulo, uma vez que, ao contrário do que as aparências muitas vezes levam a supôr não é óbvio que os alunos do ensino secundário escrevam a expressão algébrica que define a expressão do gráfico.

Esta actividade, com as duas abordagens sugeridas tem grande probabilidade de envolver *todos os alunos* no seu processo de resolução. Este é também um motivo desta proposta, pois o ensino da Matemática é *para todos os alunos* deste grau de ensino.

O conceito de limite de uma função, por exemplo, pode com as potencialidades gráficas desta calculadora, ser explorado em contextos mais significativos que os reduzidos meios propiciados pelo simples papel e lápis.

Os gráficos das funções polinomiais seguintes têm relações que podes procurar. Que afinidades encontraste? E que diferenças? Como poderás explicá-las?

$$y = x^2 \quad y = 2x^2 - 3x \quad y = -x^4$$

$$y = -x^4 + x^3 \quad y = 5x^3$$

$$y = 5x^3 - 3x^2 + x \quad y = -7x^5$$

$$y = -7x^5 - 3x^4$$

Com base nas explorações anteriores é possível estabelecer alguma conjectura quanto ao limite de qualquer função polinomial quando a variável  $x$  tende em valor absoluto para  $+\infty$

Relativamente a este tipo de actividades há a salientar que cada utilizador tem a possibilidade de experimentar rapidamente um conjunto de situações que ele pode criar, o que torna a actividade mais personalizada. Por outro lado, para esta situação, mostra-se adequada a visualização gráfica global

(graphing zoom-out). *Zoom-out* é um método que permite visualizar rapidamente o comportamento global ou assintótico de uma função, pela visualização do gráfico em ecrãs sucessivos, em que cada um contém o anterior.

O método *zoom-in* permite fazer um estudo ampliado de uma “porção” do gráfico seleccionada. Com este processo consegue-se uma visualização sucessiva do gráfico em ecrãs sucessivos, ficando cada um contido no anterior. Vejamos uma possível aplicação destes processos.

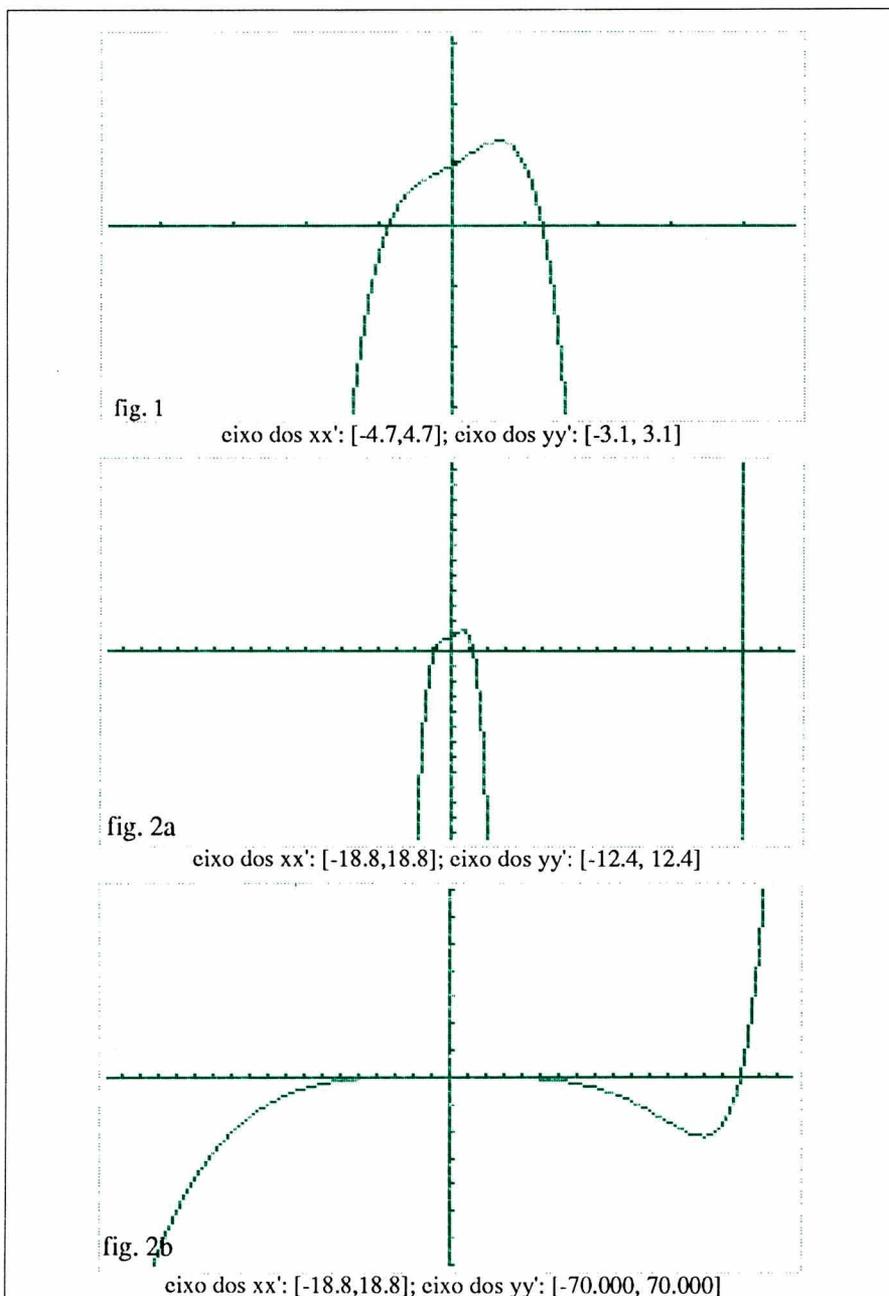
Quais serão as soluções da equação  $2^x = x^4$  ?

Nesta actividade foi uma surpresa o número de soluções!

Comecei por considerar a função  $y = 2^x - x^4$  e o primeiro gráfico que obtive foi o da figura 1.

Mas estariam aqui contidos todos os zeros? A visão global do gráfico (*zoom-out*) foi adequada para ter uma ideia do número de zeros da função (fig. 2a e 2b).

Após isto, há que estimar o valor de cada uma das *três* raízes. A raiz de maior



valor obtém-se neste caso rapidamente, utilizando a função TRACE.

Para a localização de cada uma das outras duas raízes poderá utilizar-se o método *zoom-in*, a partir do gráfico da fig. 1. Utilizando novamente a função TRACE, poderá dizer-se que uma das raízes é aproximadamente -0.87 (fig. 4).

A versatilidade deste tipo de calculadora permite que não haja necessariamente restrições *a priori*, quanto ao tipo de funções a estudar. Particularmente quanto às funções polinomiais terá interesse que as funções lineares e quadráticas sejam vias de construção de outras funções que se relacionem com elas por utilização de operações.

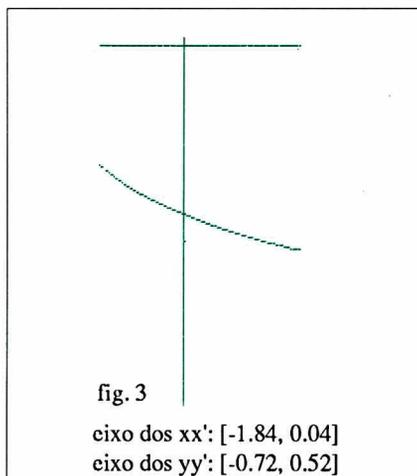
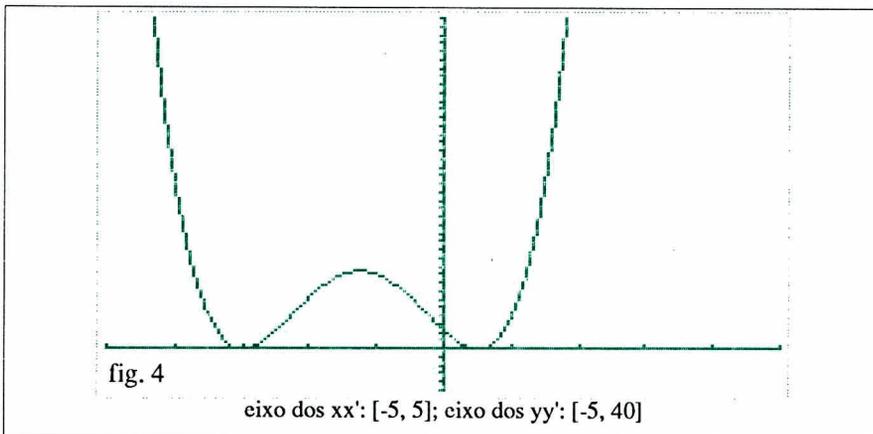
### Algumas explorações matemáticas

Para terminar este conjunto de exemplos, mais dois que envolvem situações de exploração que habitualmente não é possível fazer sem utilizá-los gráficos.

É possível, graças à rapidez da máquina no traçado de gráficos, fazer explorações de conceitos e estabelecer relações que habitualmente eram feitas com o uso de técnicas numéricas e analíticas. Do ponto de vista da participação dos alunos, a possibilidade de utilizarem a abordagem gráfica, permitir-lhes-á colocarem-se questões e construir respostas que dificilmente se conseguem num contexto de utilização de papel e lápis. O exemplo seguinte pretende fundamentar esta sugestão.

#### Desenha os gráficos das funções

$$\begin{array}{ll} y = \sin x & y = \sin x + 4 \\ y = \sin(x-3) & y = \sin(x+2) \\ y = -2 \sin(x+5) & \end{array}$$



Prevê o gráfico da função  $y = a \sin(x + b)$ , em que  $a$  e  $b$  são números reais.

Explorações deste tipo ajudarão os alunos no desenvolvimento da interpretação geométrica do papel de parâmetros  $a$ ,  $b$  e  $c$  no traçado do gráfico de funções do tipo  $y = a \sin(x + b) + c$ , a partir do gráfico de  $y = \sin x$ .

Será que o papel de cada um destes parâmetros se mantém em qualquer função  $y = a f(x + b) + c$ ? Experimente com as funções  $y = x$ ,  $y = |x|$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1/x$ .

Um outro tipo de exploração que pode ser feito é, como no caso a seguir, a partir do traçado de um gráfico, descobrir uma expressão analítica que o define.

O gráfico da figura 4, que expressão analítica pode ter?

Gostava de dizer que me deu muita satisfação escrever este artigo, porque correspondeu a um certo balanço da minha intervenção profissional, porque descobri mais algumas potencialidades da calculadora gráfica, porque espero que algumas colegas (pelo menos quatro...) continuem a participação sobre esta temática.

### Referências

Abrantes & Ponte (1982). Os Problemas no Ensino da Matemática. *Actas do Colóquio "O Ensino da Matemática nos anos 80"*.

Demana & Waits (1990). The Role of Technology in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher*, Volume 83, número 1.

Fonseca, E. (1987). *Vamos Trabalhar com a Folha de Cálculo*. Lisboa: Projecto Minerva, DEFCUL.

Matos, J. M. (1986). *Cronologia Recente do Ensino da Matemática*. Lisboa: APM.

Moreira, M. Leonor (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática*. Lisboa: Projecto Minerva, DEFCUL.

National Research Council (1989). *Everybody Counts*. Washington: National Academy of Sciences.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Ponte (1981). Interdisciplinaridade: A utilização das aplicações no ensino da Matemática. *Inflexão*, nº 2.

Ponte (1986). Investigação, Dinamização Pedagógica e Formação de Professores - Três Tarefas Para a Renovação Da Educação Matemática. *Profmat* nº 2.

Projecto Minerva (1990). *Actividades e Organização*. Lisboa: DEFCUL.

Silva, Albano (1989). Calculadoras na Educação Matemática - contributos para uma reflexão. *Educação e Matemática*, nº 11.

St. Aubyn (1981). Matemática Moderna em crise? *Inflexão*, nº 2.

Tomé, G. e Carreira, S. (1989). *Quod Novis*. Lisboa: APM e Projecto Minerva, DEFCUL.

Viana, José Paulo (1990). Materiais para a aula de Matemática. *Educação e Matemática*, nº 12.

Graciosa Veloso  
Esc. Sec. da Cidade Universitária