Equivalentes ou não?

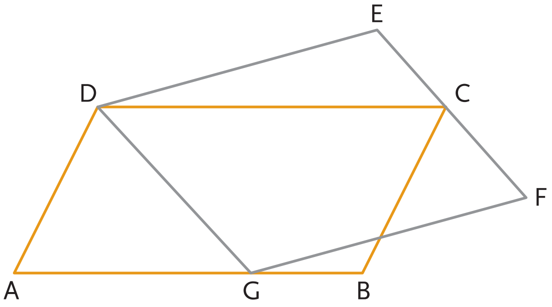
O Hugo desenhou um paralelogramo ABCD. O Diogo resolveu acrescentar um segundo paralelogramo DEFG, de tal modo que o ponto G pertencesse ao lado AB e o lado EF contivesse o ponto C.

Olhando para a figura, disse o Hugo:

— Parece-me que estes dois paralelogramos têm de ter a mesma área.

— Só se for por coincidência – discordou o Diogo. — Haverá casos em que a área do segundo é maior e outros em que é menor.

Quem tem razão?

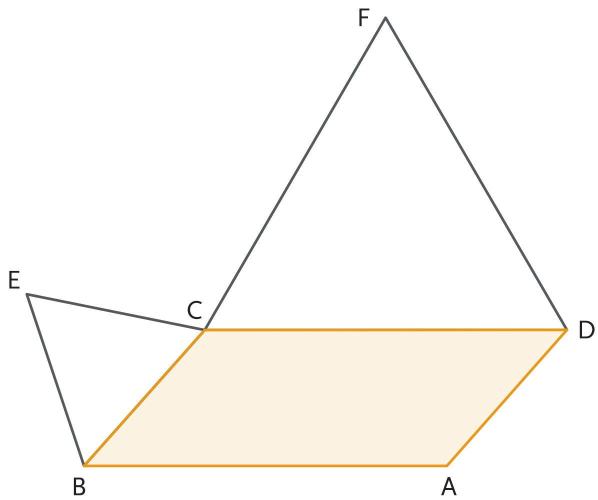


(Respostas até 19 de fevereiro para zepaulo46@gmail.com)

PARALELOGRAMO E TRIÂNGULOS

O problema proposto no número 133 de *Educação e Matemática* foi este:

A partir do paralelogramo ABCD, construíram-se, para o seu exterior, os triângulos equiláteros BCE e CDF.



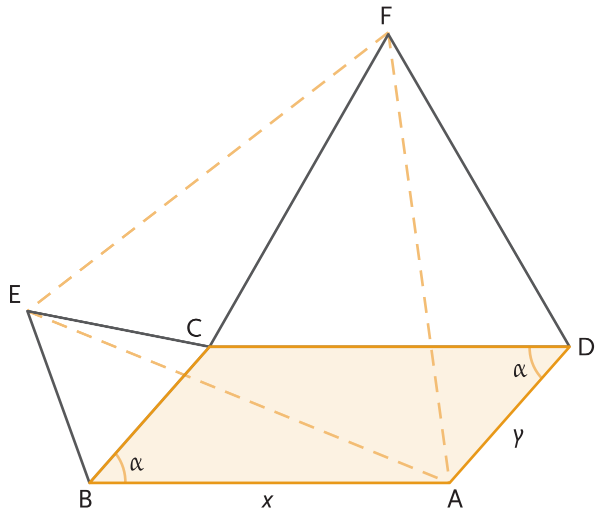
O Eduardo garante que as distâncias AE, AF e EF são iguais. Terá razão?

Prolongamento: E se os triângulos equiláteros forem construídos na direção do interior do paralelogramo?

Recebemos 15 respostas, enviadas por Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Andreia Hall, Carlos Dias, Edgar Martins (Queluz), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Ilca Cruz, João Pereira (São Martinho do Porto), Laura Almeida, Luís Bernardino, Mário Roque (Guimarães), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha), Renato Agostinho (em colaboração com professores da Associação de Escolas Carlos Gargaté) e de um grupo de quatro professores da EB 2/3 Dr. Pedrosa Veríssimo de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Praticamente todas as respostas seguiram a mesma via de resolução para a primeira parte do problema.

Demos a palavra ao Alberto Canelas.



Os triângulos AFD, ABE e ECF são iguais pois têm dois lados iguais e os ângulos por eles formados iguais.

De facto:

$AB = FD = FC = x$

$EB = AD = EC = y$

$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE = 60° + \alpha$

$\sphericalangle ECF = 360° - (60° + 60° + 180° - \alpha) = 60° + \alpha$

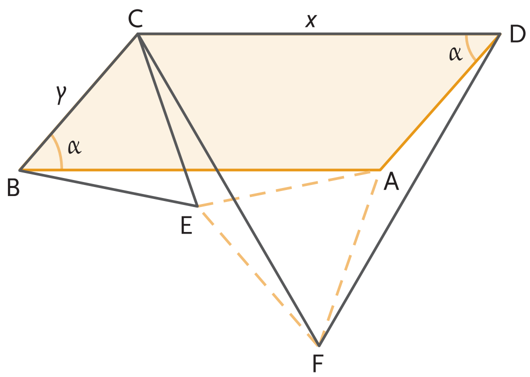
Portanto, AE = FA = FE.

Prolongamento

Com os triângulos equiláteros para o interior, era necessário, como muito bem notou o Luís Bernardino, analisar três casos: $\alpha < 60°$, $\alpha = 60°$ e $\alpha > 60°$.

A maioria dos leitores apenas resolveu para o primeiro caso. Como os processos são bastante semelhantes, será esse apenas que apresentaremos aqui.

Seja $\alpha < 60°$



Temos $180° - \alpha > 120°$.

Os três triângulos, analisados na primeira parte, estão agora invertidos. Consideraremos então os triângulos ABE, AFD e CEF e mostremos que eles são iguais.

Temos novamente:

$AB = FD = FC = x$

$EB = AD = EC = y$

E ainda:

$\sphericalangle ADF = \sphericalangle ABE = 60° - \alpha$

$\sphericalangle ECF = 180° - \alpha - 60° - 60° = 60° - \alpha$

Pelo critério de igualdade de triângulos (LAL) conclui-se que os três triângulos são iguais, donde resulta $AE = FA = FE$.