Torradas com manteiga

ou como a maneira de cortar o pão influencia a quantidade de manteiga que nele se pode colocar

Não há só uma maneira de cortar o pão para torradas e por isso a quantidade de manteiga pode ser diferente conforme a maneira de fazer o corte e de barrar com manteiga. Nesta discussão, o que nos vai interessar não são as calorias a mais que estão envolvidas, mas sim as questões matemáticas que podemos formular sobre esta situação e, consequentemente, os problemas que podemos resolver e as respostas que encontramos. O desafio aqui está na complexidade crescente das questões. Os problemas podem começar por ser muito simples, mas a sua resolução pode conduzir à formulação de novas questões mais elaboradas. Façamos um percurso.

Para iniciar pensemos neste pão como um paralelepípedo cujas dimensões são $2 \times 2 \times 3$ (fig. 1).

Há duas maneiras de cortar o pão. Em ambas a espessura das torradas é igual.

Para facilitar designamos o corte A por longitudinal e o B por corte transversal.

O corte longitudinal permite obter apenas 2 torradas, isto é, 2 faces que podem ser barradas de manteiga. O corte transversal permite obter várias torradas, dependente da dimensão do pão e da opção de colocar manteiga em mais do que uma face.

Neste caso, o corte B dá 3 torradas e a do meio pode ser barrada com manteiga em duas faces, é por isso que temos duas possibilidades de barrar para o corte B. Vamos fazer uma tabela (tabela 1) com todas as possibilidades para a situação da fig 1.

Podemos notar que para os dois cortes uma das possibilidades origina valores iguais. Esta situação levou-nos a formular uma questão. Haverá outros formatos do pão em que o resultado seja exatamente igual? Para simplificar, vamos passar a considerar que só barramos as torradas numa das faces.

Se o pão for um cubo é indiferente a maneira de cortar o pão.

Se experimentarmos com as dimensões $2 \times 3 \times 4$ (fig. 2) obtemos a mesma área para os 2 cortes (tabela 2). E se o pão for um pouco mais comprido, $2 \times 3 \times 6$ por exemplo, o que acontece?

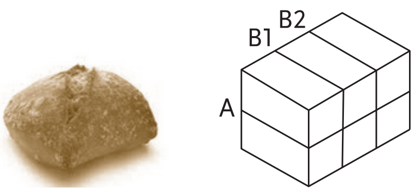

Figura 1

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	2×3	2	$2 \times (2 \times 3) = 12$
corte B	2×2	3	$3 \times (2 \times 2) = 12$
		4	$4 \times (2 \times 2) = 16$

Tabela 1

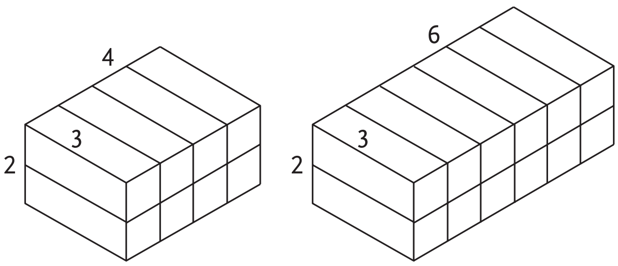

Figura 2

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	3×4	2	$2 \times (3 \times 4) = 24$
corte B	2×3	4	$4 \times (2 \times 3) = 24$
corte A	3×6	2	$2 \times (3 \times 6) = 36$
corte B	2×3	6	$6 \times (2 \times 3) = 36$

Tabela 2

A tabela 2 mostra-nos que o resultado é o mesmo para os dois tipos de corte.

Será que vai acontecer sempre esta igualdade? Como podemos ter a certeza disso?

Se tivermos em que conta que há uma relação entre o valor de k e as dimensões c e a para conseguir que as torradas tenham todas a mesma espessura e que essa relação é $k = c/(a/2)$ que é equivalente a ter $c = k \times (a/2)$, podemos verificar que são iguais os dois valores da área barrada:

$$2bc = 2b \times (k \times (a/2)) = k \times ab$$

Quando formulei e resolvi este problema não tive em atenção que para o corte B as torradas só deviam ser barradas de um lado e, por isso, obtive valores diferentes para os dois tipos de cortes. Por essa razão avancei com um outro tipo de questão para a situação em que as torradas centrais são barradas dos dois lados.

Qual é a percentagem de aumento de manteiga necessária para barrar as torradas, isto é, qual é a percentagem de aumento da área a barrar?

Ficamos por aqui, a generalização para o caso *abc* fica ao cuidado do leitor mais interessado. E fica também o desafio para encontrar uma dimensão de pão que permita obter o dobro da área a barrar de manteiga, isto é, um aumento de 100%.

Um dos aspetos que destaco neste percurso é que começámos por uma situação muito simples que nos levou progressivamente à formulação de problemas mais elaborados e nos permitiu fazer uma generalização, com uma entrada muito significativa pela álgebra. Um outro aspeto foi a necessidade de simplificar o modelo geométrico, neste caso recorrendo a um paralelepípedo e de colocar cuidadosamente as condições de formulação do problema. Neste caso, barrar apenas de um lado ou dos dois faz uma grande diferença matemática. Para concluir, faltou o chá ou o café com leite.

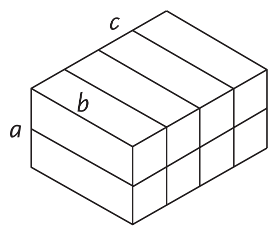

Figura 3

	área da face da torrada	nº de faces da torrada a barrar de manteiga	total da área barrada com manteiga
corte A	$b \times c$	2	$2 \times (b \times x)$
corte B	$a \times x$	k	$k \times (a \times b)$

Tabela 3

dimensões do paralelepípedo	corte A	corte B	aumento da área	percentagem de variação da área a barrar
$2 \times 2 \times 4$	12	$4 \times (2 \times 2) = 16$	4	+ 33,3%
$2 \times 3 \times 4$	24	$6 \times (2 \times 3) = 36$	12	+ 50%
$2 \times 3 \times 6$	36	$10 \times (2 \times 3) = 60$	24	+ 66,6%

Tabela 4