

Alunos em ação no Congresso Matemático

Relato de uma experiência

TERESA PIMENTEL

INTRODUÇÃO

Os desafios não são uma ideia nova em matemática. A construção e organização do conhecimento matemático e a exploração de novos conceitos baseia-se na descoberta de padrões e consequente emergência de novos desafios ao talento. Este processo de aquisição de conhecimento pode ocorrer de muitas formas, dentro e fora da sala de aula. Alguns ambientes de aprendizagem da matemática fora da sala de aula são defendidos como motivadores e desafiadores para alunos com especial talento, que de outro modo ficaria desconhecido ou mesmo desapareceria, mas também dando a oportunidade de apreciar a matemática a alunos que, por vários factores, não se sentem particularmente motivados para a disciplina e nunca puderam sentir a sua beleza (Kenderov *et al.*, 2009). Lançar desafios aos alunos em qualquer nível de desenvolvimento pode evitar emoções negativas em relação à matemática (Hannula, 2004) mas é também importante para desenvolver a capacidade de resolução de problemas e a criatividade (Protasov *et al.*, 2009; Silver, 1997).

Neste sentido, há já alguns anos foi lançado, na Escola Secundária de Santa Maria Maior em Viana do Castelo, o projeto denominado Congresso Matemático, que pretende, entre outros, criar um espaço lúdico de encontro informal ligado à aprendizagem da matemática, promover a capacidade de argumentação e comunicação matemática dos alunos, aprofundar o conhecimento sobre processos e tópicos matemáticos através da necessidade de exprimir raciocínios e de seguir linhas de raciocínio, desenvolver a criatividade na resolução e formulação de problemas, valorizar e apreciar o trabalho dos alunos e desenvolver a autonomia. É uma iniciativa aberta a toda a comunidade escolar, que se realiza atualmente três vezes por ano em tardes em que não há aulas, reservadas para trabalho colaborativo e atividades com alunos para além da sala de aula.

O Congresso Matemático consiste essencialmente em apresentações orais feitas por alunos ou grupos de alunos da sua resolução de problemas previamente conhecidos, mas permite outras intervenções. Nos seus princípios está estabelecido que esta iniciativa, mais do que dirigida aos alunos, deve ser construída pelos alunos. Temos procurado, ao longo da experiência, dar resposta às questões sobre o formato, as tarefas e as atitudes dos professores que melhor podem motivar a participação dos alunos e desenvolver capacidades de resolução de problemas e de comunicação matemática.

CRIATIVIDADE E COMUNICAÇÃO

Silver (1997) argumenta que a Matemática é uma das áreas do pensamento humano em que a criatividade mais se manifesta, mas defende que, contrariamente à visão tradicional, ela não é apenas característica inata de alunos especialmente talentosos ou génios. A criatividade pode ser experimentada e ensinada a todos, o que poderá ser realizado através de um ensino rico em tarefas de resolução e formulação de problemas. Nesse percurso, que começa com a curiosidade, o aluno envolve-se e, usando a imaginação, pode gerar diferentes formulações ou resoluções. É de realçar (Presmeg, 2014) a importância da necessidade de períodos de concentração e incubação antes do momento «Aha!» que dá a sensação de certeza de descoberta de um caminho para a solução.

Procuramos ter em vista as três componentes fundamentais da criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade (ver artigo desta revista nas pp. 10–11) na seleção das tarefas a propor aos alunos com vista à sua apresentação no Congresso Matemático.

Aqui a questão da comunicação é essencial. Através da comunicação, os alunos refletem, clarificam e expandem

No quadrado inicial, de lado 1, está marcado o ponto médio do lado inferior. Qual é a área do papagaio?



Figura 1. Problema principal do congresso alargado

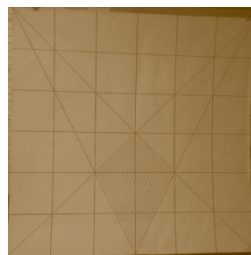


Figura 2. Resolução com apoio de grelha (2.º ano)

as ideias e compreensão das relações matemáticas e argumentos matemáticos (e.g. Smith & Stein, 2011). A comunicação é um processo fundamental na aprendizagem da matemática. Mas a comunicação não surge naturalmente; é necessário os professores ajudarem os alunos a aprender como fazê-lo. E se é necessário comunicar fora da sala de aula, como no Congresso Matemático, ainda se torna mais imperiosa a necessidade de se fazer compreender e captar a atenção da audiência. O aluno precisa de: (a) organizar ideias e refinar ou rever estratégias; (b) usar recursos orais, visuais ou outros — tecnologias, materiais concretos. Para isso, tem de usar a criatividade quer na apresentação quer na resolução dos problemas.

O CONGRESSO

O projeto Congresso Matemático, dirigido a todos os alunos da escola, dura há 6 anos e já teve 21 edições. A equipa envolve todos os professores de Matemática da escola, que procuram incentivar os seus próprios alunos à participação. O formato do evento foi sofrendo alterações ao longo do tempo para melhor dar resposta aos interesses e necessidades dos participantes. Procura-se sempre uma maior participação e envolvimento dos alunos. Os professores estão presentes no congresso mas normalmente não intervêm. Ultimamente, antes de cada congresso e mediante interesse demonstrado pelos próprios alunos, um grupo de 6–8 alunos é convidado para dinamizar o congresso, e, com esse propósito, reúnem-se com a professora coordenadora para organizar e discutir os pormenores. Estes alunos encarregam-se de apresentar a sessão, desenvolvendo um pouco o seu tema; apresentar os colegas ou grupos de colegas que farão a apresentação oral dos seus trabalhos; propor outros desafios mais curtos a serem resolvidos durante o congresso de forma a gerar maior interação entre os participantes; e contar algumas piadas ou adivinhas matemáticas para aligeirar um pouco entre apresentações. Para além deste grupo, o congresso conta sempre com uma equipa

técnica, formada por cerca de 4 alunos, que estão encarregados de apoiar o funcionamento de computadores, projeção, som e luz. Esta opção, para além do objetivo imediato, tem o interesse de envolver alunos que à partida não se sentiriam muito motivados a ir ao congresso mas que gostam destas tarefas.

Recentemente a escola entrou em agrupamento. Surgiu um projeto denominado *Conexões 1–12* com o objetivo de promover uma articulação curricular vertical desde o 1.º ao 12.º ano. Integrada nesse projeto realizou-se uma ação de formação para professores de matemática do agrupamento.

Houve assim oportunidade de lançar e organizar em conjunto um congresso alargado a todos os alunos do agrupamento. Nesse sentido era necessário selecionar tarefas adequadas para esse efeito. Explorou-se então um problema que foi escolhido de modo a ser suficientemente rico e flexível para permitir a sua abordagem por alunos de diferentes níveis etários.

Apresentamos, na Figura 1, o problema principal do congresso alargado e de seguida algumas resoluções, na sua maioria apresentadas no congresso pelos seus autores.

A resolução do 1.º ciclo, apresentada por alunos do 2.º ano, foi preparada com o apoio dos respetivos professores, que decidiram em conjunto adaptar o quadrado a uma grelha de 6×6 de forma a tornar o problema acessível a alunos tão pequenos (Figura 2).

Os alunos tiveram oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos como propriedades de figuras geométricas, os números racionais, áreas de figuras. Depois duma exploração aprofundada que incluiu a decomposição do papagaio em triângulos e a comparação de áreas descobriram por fim que o papagaio ocupava o equivalente a 3 quadradinhos em 36.

Um grupo do 7.º ano^[1] fez uma abordagem através da instalação do quadrado numa grelha de 12×12 que pode ver-se na Figura 3.

Estabeleceram relações entre áreas e, aceitando visualmente que a altura do triângulo assinalada na figura é de

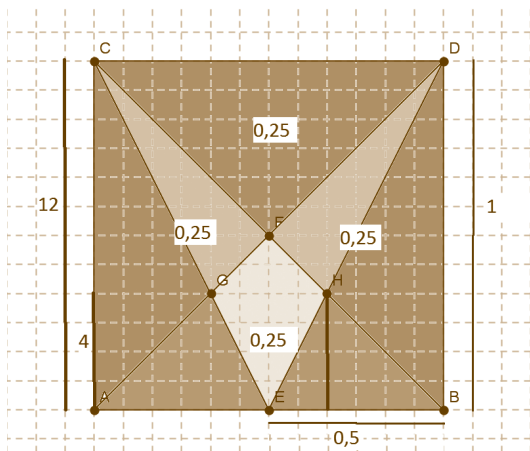
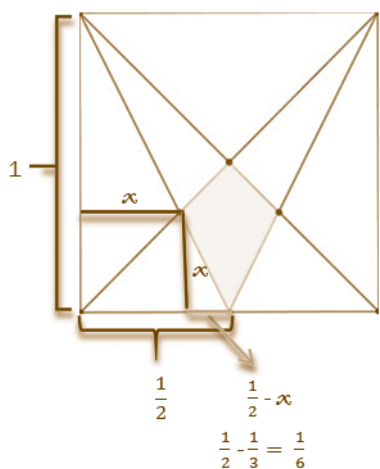


Figura 3. Resolução com apoio de grelha (7.º ano)



Os lados correspondentes dos dois triângulos são proporcionais.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-x} \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}x &= \frac{1}{2}-x \Leftrightarrow \\ \frac{1}{2}x+x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \frac{3}{2}x &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ 3x &= 1 \Leftrightarrow \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

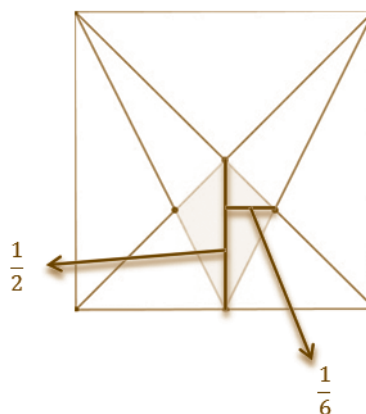


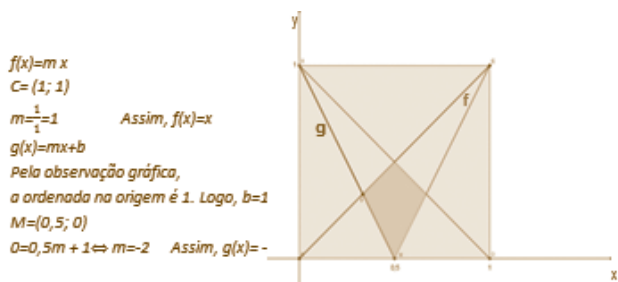
Figura 4. Resolução por semelhança de triângulos (8.º ano)

4/12, calcularam a sua área através da fórmula, o que lhes permitiu de seguida concluir sobre a área do papagaio.

Um grupo do 8.º ano^[2] recorreu à semelhança de triângulos, como é ilustrado na Figura 4. Realçaram o facto de a diagonal do quadrado estar contida na bisetriz do ângulo reto para concluir que a distância de um ponto da diagonal a cada lado do quadrado é a mesma. Depois da de-

terminação do valor de x já lhes foi fácil calcular a área do papagaio, em que marcaram as diagonais.

Outra resolução, esta de alunos do 9.º ano^[3], recorreu à geometria analítica (Figura 5). Determinaram uma expressão analítica das funções afins f e g , que definiram à partida, tendo feito em seguida a interseção das retas correspondentes para obter as coordenadas do ponto F . A partir



$f(x)=m x$
 $C=(1; 1)$
 $m=\frac{1}{1}=1$ Assim, $f(x)=x$
 $g(x)=m x+b$
 Pela observação gráfica, a ordenada na origem é 1. Logo, $b=1$
 $M=(0,5; 0)$
 $0=0,5 m+1 \Leftrightarrow m=-2$ Assim, $g(x)=-$

Determinação do ponto de interseção:

$$\begin{cases} y=x \\ y=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ x=-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{3} \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Sendo assim, o ponto de interseção é $F=(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Figura 5. Resolução com geometria analítica (9.º ano)



Figura 6. Resolução através de dobragens (10.º ano)

daqui determinaram a área do papagaio por decomposição em dois triângulos através da diagonal vertical.

Duas alunas do 10.º ano utilizaram uma cartolina, como se ilustra na Figura 6, para mostrar como tinham raciocinado com base na instalação do quadrado em papel pontead e dobragem do papel.

Uma aluna do 11.º ano^[4] fez questão de usar trigonometria, uma vez que era um tema que tinha aprendido nesse ano e que lhe parecia muito poderoso (Figura 7). Baseou-se no facto de as diagonais do quadrado serem perpendiculares considerando os triângulos retângulos [BDM] e [BEF], o que lhe permitiu, através do cálculo do comprimento de [EF], chegar à área do papagaio.

Apresentam-se de seguida duas resoluções visuais, muito elegantes e originais.

Na primeira, um aluno do 11.º ano^[5], utilizando diretamente o conceito de medida de área, procurou saber quantas vezes o papagaio cabia no quadrado (Figura 8).

Na outra resolução, o aluno, do 10.º ano^[6], «viu» o triângulo formado pelas duas semi-diagonais superiores a refletir-se sobre o lado do quadrado originando um novo papagaio que é uma ampliação do primeiro (Figura 9). Usando o conhecimento de que figuras semelhantes têm os lados

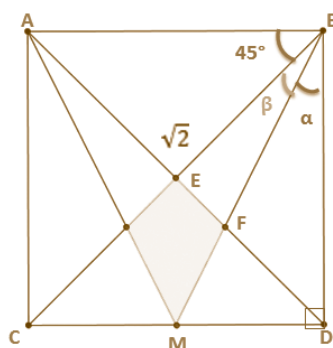
proporcionais, estabeleceu a proporção que lhe permitiu tirar o comprimento da diagonal horizontal do papagaio para poder determinar a sua área.

Houve ainda, neste evento, a apresentação pelos dinamizadores (8 alunos do 12.º ano) de pequenos problemas de algebrina e de um puzzle para ser resolvido *in loco* por grupos de voluntários e que teve direito a prémios, uma exibição com material manipulável sobre a tira de Möbius e ainda uma apresentação de uma turma convidada do 8.º ano de uma escola vizinha. Estiveram presentes cerca de 200 pessoas.

NOTAS FINAIS

Na sua maioria, estas resoluções foram apresentadas pelos seus criadores nas respetivas turmas antes do congresso. Em face das resoluções propostas de antemão pelos alunos é feita uma seleção criteriosa, para evitar, por exemplo, repetição de abordagens, e são ordenadas de acordo com as ferramentas matemáticas utilizadas, e por níveis progressivos de abstração e rigor, em consonância com o modelo proposto por Smith e Stein (2011), com vista à apresentação no congresso. Verificamos que um único problema tem potencial para ser explorado de uma grande variedade de modos diferentes, e é acessível a alunos de diferentes níveis etários e de conhecimento. Os participantes no congresso puderam contactar com diferentes abordagens e representações do mesmo problema, desenvolvendo assim a capacidade de fazer conexões entre grandes ideias, o que proporciona uma visão mais global e abrangente da matemática. As conexões, que surgiram em número elevado e com grande força, implicam uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos em jogo (Hiebert & Carpenter, 1992).

A fluência e a flexibilidade podem ser desenvolvidas, em cada aluno, não só pelas tentativas de resolução do problema mas também por apreciação das diferentes estratégias



Seja α o ângulo MBD e β o ângulo CBM, tem-se:

$$\tan \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{BD}}; \quad \overline{MD} = \frac{1}{2} \quad e \quad \overline{BD} = 1$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\beta = 45^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{EF}}{\overline{EB}} \quad e \quad \overline{EB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{EF}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2} \tan \beta$$

Figura 7. Resolução com trigonometria (11.º ano)

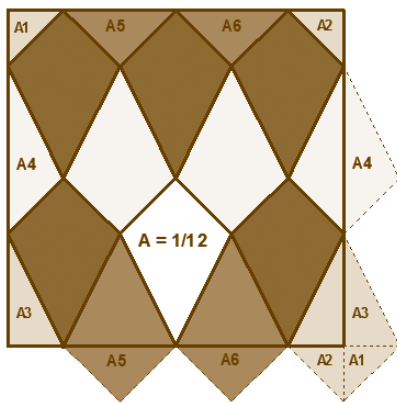


Figura 8. Resolução utilizando o conceito de medida (11.º ano)

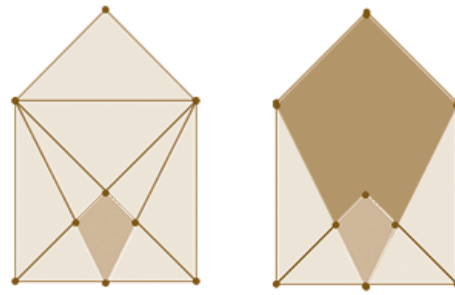


Figura 9. Resolução visual transformando a figura inicial (10.º ano)

de resolução e múltiplas representações apresentadas, correspondendo a outros tantos modos de pensar. A originalidade é patente quer na descoberta de resoluções únicas quer também nos modos escolhidos para apresentação pública dos trabalhos. Sobretudo as duas últimas resoluções apresentadas acima têm um grau de originalidade muito elevado, facto que foi corroborado por todos os professores de matemática envolvidos. De facto, nenhuma destas resoluções era expectável, nem mesmo no espaço-solução dos professores.

Os alunos sentem-se bem no congresso, e esta conclusão é suportada pela grande afluência livre em tardes em que não há aulas. A responsabilidade por uma apresentação pública no congresso matemático fá-los sentir orgulhosos das suas capacidades, quer matemáticas quer comunicacionais. Inquéritos e entrevistas que têm vindo a ser realizados mostram que os alunos consideram o congresso matemático como uma das atividades interessantes em que têm participado na escola, que pode prepará-los para futuros desafios, e que deixa(rá) uma marca positiva que recordarão depois de sair da escola.

Em suma, esta iniciativa do Congresso Matemático tem revelado potencial para promover a motivação dos alunos para a matemática; desenvolver formas criativas de pensar matematicamente, a fim de encontrar estratégias de resolução diferentes e originais; desenvolver capacidades de comunicação; cultivar o sentido de agrupamento, juntando muitos alunos num projeto comum com vontade de partilhar descobertas matemáticas; e promover a articulação vertical, materializada na transversalidade da resolução de um mesmo problema por alunos dos vários níveis do ensino básico e secundário.

Notas

[1] Rui Dantas, Pedro Forte e Rúben Ribeiro.

[2] Ana Afonso e Paloma Wolfango.

[3] André Neto, Catarina Alcobaça e Pedro Maciel.

[4] Rita Martins.

[5] Ricardo Teles.

[6] Gonçalo Carvalhido.

Referências

- Hannula, M. (2004). *Affect in mathematical thinking and learning*. Turku: Turun Yliopisto.
- Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). New York: Mcmillan.
- Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom — Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom — New ICMI Study Series 12* (pp. 53–96). Springer.
- Presmeg, N. (2014). Creative advantages of visual solutions to some non-routine mathematical problems. In S. Carreira, N. Amado, K. Jones & H. Jacinto (Eds.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (pp. 156–167). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.
- Protasov, V., Applebaum, M., Karp, A., Kašuba, R., Sossinsky, A., Barbeau, E. & Taylor, P. (2009). Challenging Problems: Mathematical Contents and Sources. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom — New ICMI Study Series 12* (pp. 11–52). Springer.
- Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 3, 75–80.
- Smith, M. & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

TERESA PIMENTEL

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS DE SANTA MARIA MAIOR