O problema do Baltazar

Eduarda Moura

O problema de Baltazar vem a propósito de um problema de um professor de matemática chamado Brian Bolt. É um problema tipo puzzle, onde quase nada ajuda a resolvê-lo. Para o resolver é necessário, segundo a escola tradicional do pensamento escolar, ter uma inspiração, uma sorte de génio. Neste artigo explicaremos como não é bem assim. Um misto de metacognição e reflexão abstrativa são os ingredientes necessários, para além da exploração usual que se faz para resolver um problema de matemática.

Uma formulação para o problema 41 do Bolt (1996, p. 54) poderá ser:

Dada uma rede quadrada 6 × 6, colorir 12 dos 36 quadrados com:

1. só 2 quadrados em cada linha;
2. só 2 quadrados em cada coluna; e,
3. menos de 3 quadrados em cada diagonal.

Que problema interessante! Mas sem ir ver a solução o desafio é enorme! Não se consegue encontrar facilmente uma solução. E o Polya e suas recomendações? No meio de tentativas que resultam em erro ficamos a pensar que não servem para nada!

Neste artigo discutiremos como um problema que parece intransponível pode ser levado para a sala de aula depois de adaptado e pensadas as ações que podem levar os alunos a interessar-se por este problema.

O que é então uma problema de matemática?

Ora o 41 do Bolt parece ser um problema intransponível. Senão vejamos: qual o obstáculo de peso a ultrapassar? Não é o de 2 casas coloridas em cada linha e em cada coluna mas que só dois quadrados possam ser coloridos *em cada uma* das diagonais. Se experimentarmos tentando produzir uma solução em que as três condições são satisfeitas chegamos à conclusão que as duas primeiras soluções são muito facilmente satisfeitas, enquanto que a terceira condição não é trivialmente satisfeita. Um exemplo dessas pseudo-soluções encontra-se representado na figura 1.

E são essas pseudo-soluções as que temos para pensar ao continuar a resolver o problema. Ah! Cá está o Polya! Pensar sobre o que obtivemos colocando as pseudo-soluções em perspetiva. Na tentativa de baixar o número de diagonais com 3 quadrados coloridos conseguimos todas as diagonais exceto duas (ver figura 2).

Ora é muito interessante mas não chega, podemos, no entanto, formular um outro problema, ou seja, a terceira

V	O	O	O	O	V
V	O	O	V	O	O
O	O	V	O	V	O
O	V	O	O	O	V
O	O	V	O	V	O
O	V	O	V	O	O

Figura 1.— Não mais de 3 quadrados coloridos em cada diagonal.

O	V	O	O	$\underline{V}$	O
V	O	O	$\underline{V}$	O	O
O	O	O	$\underline{V}$	O	V
O	$\underline{V}$	$\underline{\underline{V}}$	O	O	O
O	O	V	O	V	O
$\underline{\underline{V}}$	O	O	O	O	V

Figura 2.— Todas as diagonais exceto duas satisfazem a terceira condição.

1	3	3	2	2	1
2	1	2	3	1	3
3	2	1	1	3	2
3	1	2	3	2	1
1	3	1	2	3	2
2	2	3	1	1	3

Figura 3.— Quatro quadrados de cor 2 ficam coloridos.

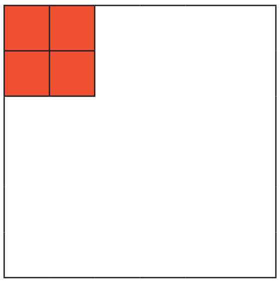

Figura 4.— Coloração que leva a uma diagonal com mais de 3 quadrados coloridos.

condição passa a ser: cada diagonal pode ficar com até 3 casas coloridas. Mas adicionamos uma quarta condição:

4. encontrar 3 soluções disjuntas no mesmo quadrado 6 × 6.

Assim, teremos 12 casas coloridas de uma cor, 12 casas coloridas de outra cor, e as últimas 12 casas de uma outra cor. Tudo numa só rede de 36 quadrados.

Este é, de facto, um problema porque podemos encontrar, por exemplo, duas soluções disjuntas, mas não três (figura 3).

Não conseguimos uma solução do problema dado que para a cor número 2, temos 4 casas coloridas numa diagonal.

A ideia das soluções disjuntas aparece como resultado da estratégia de eliminar quadrados a colorir na procura de uma solução. Ficamos então com um problema com muitas soluções, a que eu chamei *o problema do Baltazar*, dada uma história que li há muito tempo de um menino que gostava de ir à pesca juntamente com a sua irmã. Tinha a sorte de apanhar mais peixes do que ela porque era muito sossegado e ficava em silêncio durante horas sem se mexer com a rede submersa em água, apanhando assim os inadvertidos peixes.

Formulamos então um novo problema e podemos começar a interrogarmo-nos sobre os seus limites. Podemos também diminuir a quantidade de casas de 12 para 10 voltando a uma só cor e temos ainda um outro problema, este muito mais fácil que o inicial.

Metacognição e reflexão abstrativa

Passamos, então, da situação de não termos qualquer conhecimento sobre um problema, a ter na ideia pequenos factos que nos fazem sentir que já sabemos alguma coisa sobre ele. Por exemplo, ajudou:

1. eliminar casas em diagonais;
2. não acumular quadrados coloridos, como no quadrado da figura 4, por exemplo;
3. dividir o quadrado em duas partes pela diagonal e distribuir a coloração abaixo e acima da diagonal principal; ou,
4. traçar todas as diagonais numa direção colorindo só dois quadrados em cada diagonal, e coordenando depois com as soluções das diagonais da outra direção e verificando linhas e colunas por último.

Todos estes factos, para nossa vantagem, ou desvantagem — pois podem não estar de todo relacionados com a solução do problema — fazem parte do conhecimento que levaremos connosco quando resolvemos outros problemas similares. Chama-se metacognição (Schoenfeld, 1992) e neste caso também frustração passaria a fazer parte do nosso conhecimento se não seguíssemos o conselho de Polya de aproveitarmos o que nos aparece durante as tentativas de resolução, e levantássemos questões sobre o problema para que outros pequenos problemas nos surjam e nos possam ajudar. Neste caso tivemos sorte e conseguimos um outro problema: o problema do Baltazar!

Mas o problema inicial não ficou ainda resolvido e é necessário voltar a pensar nele ou pareceria que formulámos um outro problema e nada mais. É aqui que se fica muito surpreso, quando ao voltar ao problema, uns dias mais tarde, encontramos uma solução, e depois outra e depois mais outra ainda!

Terá sido reflexão abstrativa? Primeiro, será de notar que se logo víssemos as soluções do Bolt teríamos provavelmente seguido outro caminho. Na história da resolução deste problema, formulámos um problema mais fácil, mas não antes de termos ganho uma experiência considerável. Temos alguma razão para pensar que foi esta experiência que levou a que ao voltar a pensar no problema, o víssemos de forma diferente. Novamente nada na experiência que ocorreu poderia ter delineado o caminho para que de repente as soluções começassem a aparecer. A aprendizagem e respetivo conhecimento foi instrumental numa primeira fase, no sentido de von Glasersfeld (1989, p. 10).

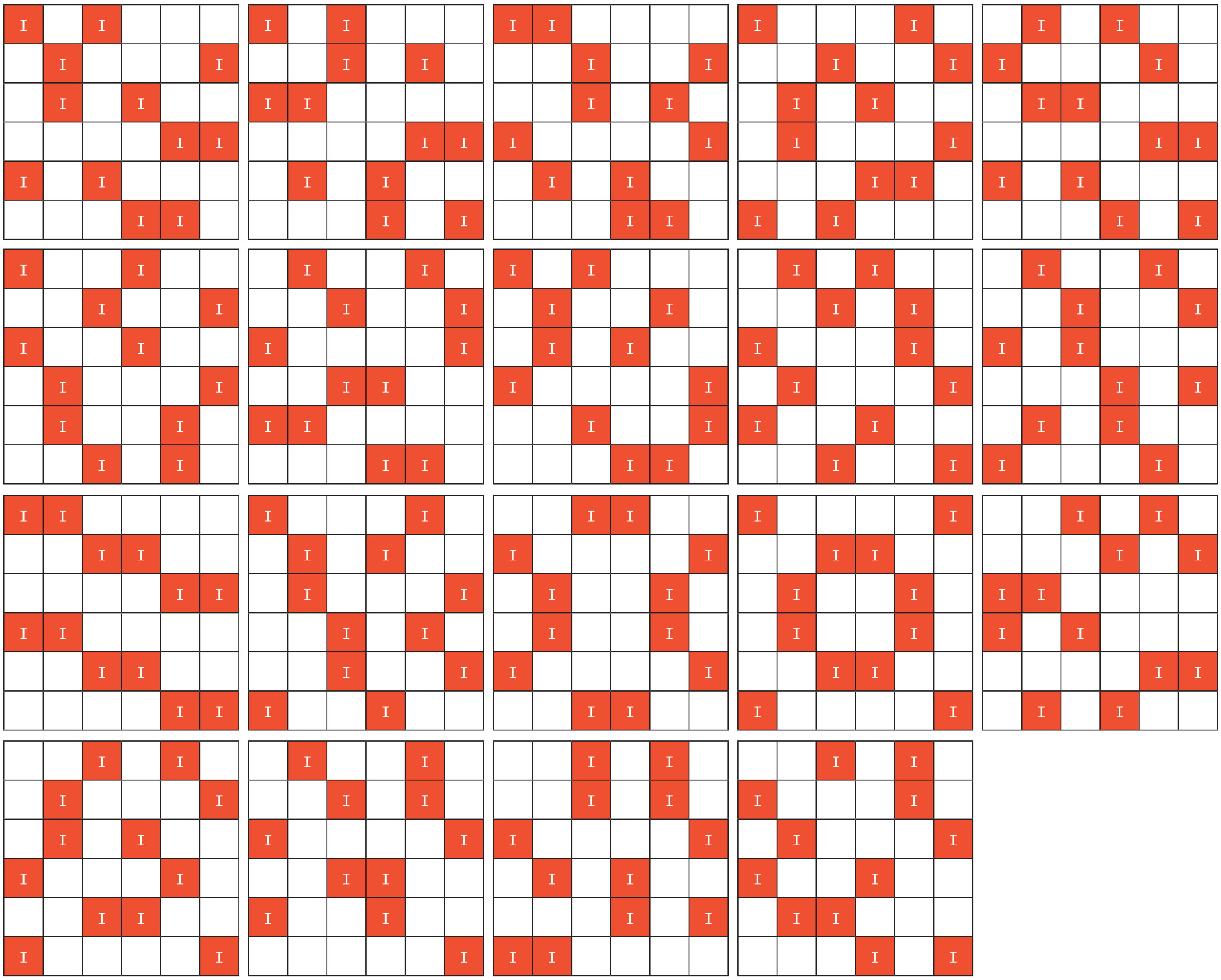

Figura 5.— Algumas soluções do problema 41, incluindo as duas dadas pelo Bolt.

Na segunda fase de resolução, reflexão abstrativa, isto é, novos esquemas e formas de operar, foram explicitamente instrumentais: quando voltamos ao problema outro tipo de organização da distribuição dos quadrados pelas casas, juntamente com a experiência acumulada em estratégias, foi colocada em ação e uma das soluções foi encontrada. E depois outra, e mais outra, porque em primeiro lugar o problema tornou-se possível e, em segundo lugar, a tentativa-erro uma atividade dirigida.

Concluímos, então, que alguma aprendizagem foi conseguida para além da aprendizagem que ocorreu ao nível geral da resolução de problemas (mais um tipo de problema passou a fazer parte da experiência dos problemas resolvidos), nomeadamente:

— Estratégias em que passamos a confiar;
— Soluções parciais;
— Mais que uma solução e logo uma nova perspectiva sobre o problema;
— Um outro problema mais fácil que formulámos;
— Um problema que passamos agora a conseguir resolver;
— Tudo o que passaremos a conseguir fazer com tudo isto na resolução de outros problemas.

Mas ainda não acabou! Começa agora! A primeira questão a que já nos referimos antes é: Quantas soluções tem o problema? Ou, como vamos saber que as temos todas?

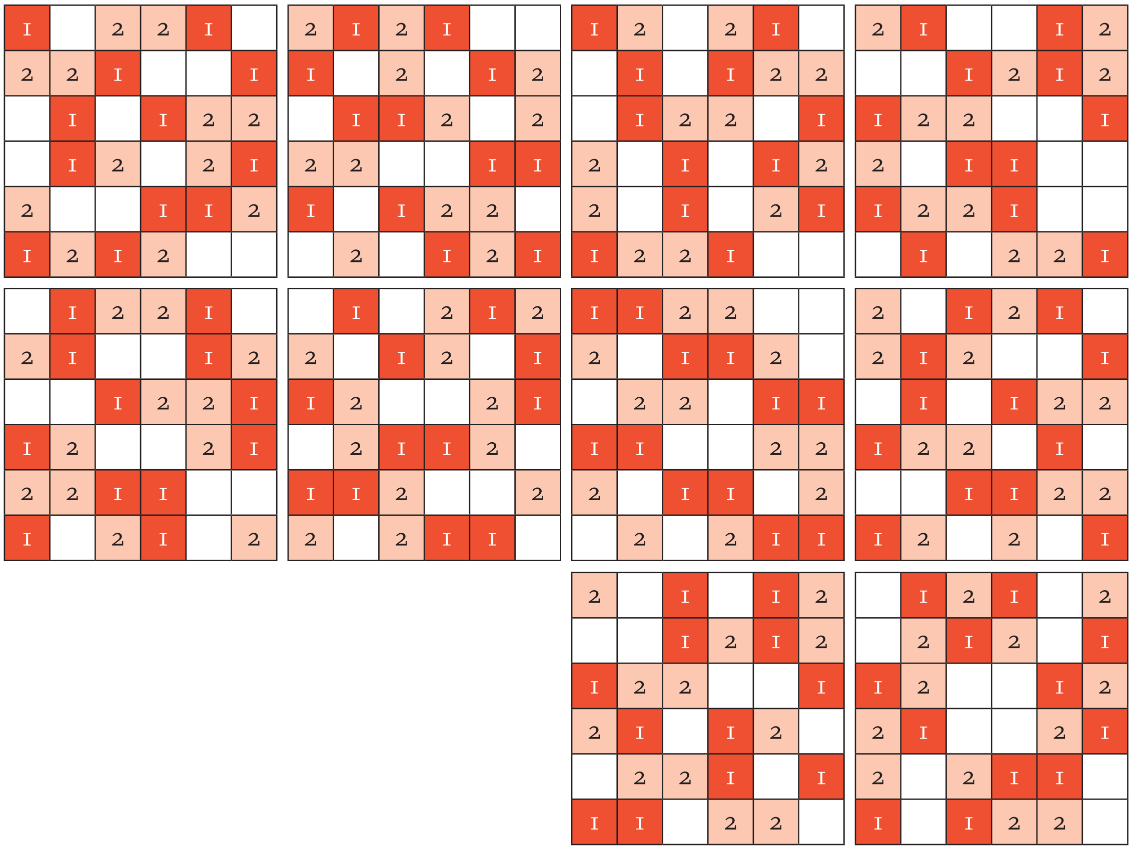

Figura 6.— Duas soluções disjuntas mas não 3 soluções disjuntas.

A investigação continua

O problema fica, então, muito mais interessante e uma das soluções no fim do livro, diferente de qualquer uma das encontradas, levou ainda a uma outra investigação.

Das inovações que fizemos com a formulação do problema do Baltazar, a de colorir toda a rede com 3 soluções disjuntas, pode ser transportada para o problema inicial estendendo a investigação. Ora ver as soluções do Bolt, duas ao todo, teve todo o proveito nesta altura pois continuando a encontrar soluções disjuntas temos casos em que temos duas soluções, mas não três soluções. A investigação foi produtiva como podemos ver na figura 6.

E não são só quatro as s oluções! São muitas mais!

Uma das soluções do livro para o problema 41 do Bolt é muito particular porque é simétrica (figura 7).

E para surpresa nossa, a partir dela conseguimos 3 soluções disjuntas (figura 8).

E até agora não encontrei nenhuma outra configuração, simétrica ou não simétrica, que conduza a 3 soluções disjuntas, enquanto que para a solução do Bolt encontramos algumas (figura 9).

O problema começa a ficar cansativo, especialmente porque é aborrecido fazer todas as verificações necessárias, bem como ter a certeza que todas as soluções foram encontradas, mas lá produtivo é, e parece ser o problema com mais soluções no mundo inteiro! Passamos então à fase de demonstração que sai fora do âmbito deste artigo. No entanto, passamos a sentir que estamos no fim da resolução do problema. Tentando ver se todas as soluções tinham sido encontradas, chega-se à conclusão que talvez seja necessário um algoritmo para termos a certeza de as ter encontrado todas, e ficamos no domínio da demonstração por computador, a braços com uma demonstração por método exaustivo. E agora! A demonstração produz o algoritmo ou o algo-

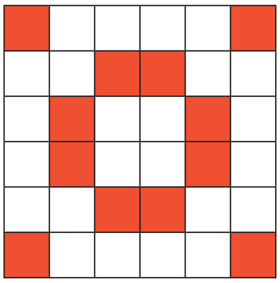

Figura 7.— Solução dada ao problema por Bolt (1996, p. 207).

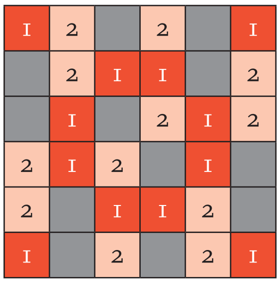

Figura 8.— Três soluções disjuntas.

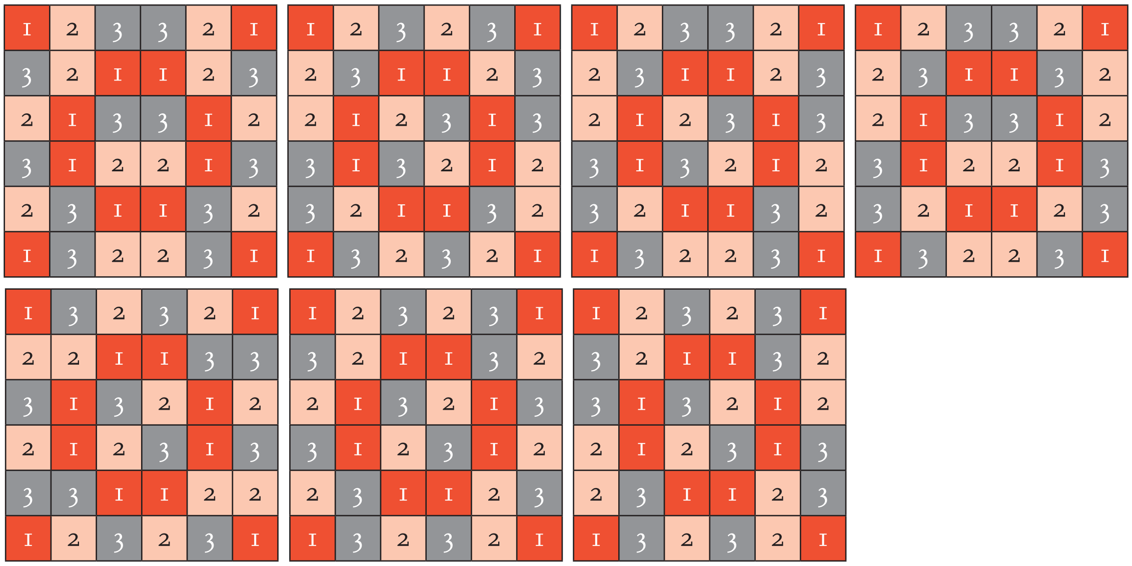

Figura 9.— Mais sete soluções disjuntas a partir da solução simétrica do Bolt

ritmo é necessário para a demonstração? Neste caso fica-se um pouco confuso, mas parece ser a demonstração que produz o algoritmo! Um problema para a discussão filosófica sobre a atividade de resolução de problemas. De acrescentar que na nova formulação a solução simétrica dada pelo Bolt (para o problema 41) pede para que em cada diagonal principal fiquem 2 casas de uma cor, 2 casas de outra cor e as restantes da última cor e logo constituiu um ponto de partida para a procura de três soluções disjuntas.

Este tipo de problema tem outras versões como, por exemplo, colorir os quadrados de um tabuleiro de xadrez dois a dois, ficando por colorir 8, e de tal maneira que destes restantes 8 não fiquem 3 quadrados em diagonal. Ter resolvido o problema 41 do Bolt vai ajudar a resolver este, que por acaso também é do Bolt, mas o 71:

«Desenhe um tabuleiro quadrado 8x8 onde se ajustem as suas peças de dominó, de tal modo que cada peça de dominó cubra exatamente 2 casas. Os 28 dominós de um conjunto normal podem ser colocados de modo a cobrir todas as casas à exceção de 8. Há ainda diversas distribuições possíveis. Pode-se ver na figura uma forma que deixa a descoberto uma casa em cada linha e outra em cada coluna do tabuleiro[1]. Como o leitor poderá verificar, se experimentar, uma tal distribuição pode ser conseguida de diversas maneiras, mas o verdadeiro desafio é encontrar uma maneira tal que, além disso, não surjam três centros de casas desocupadas perfeitamente alinhados. A distribuição de dominós da solução que se vê na figura falha em duas linhas, indicadas pelas rectas que atravessam os centros dos quadrados em falta.» (p. 85).

Um problema igualmente divertido e para o qual se tem muitas estratégias na mão, agora, claro está, e não antes de resolver o 41 do Bolt!

Comentário final

Tudo isto em resultado de formularmos um outro problema relacionado com o dado! Mas toda esta experiência foi muito particular e pessoal. Para Thompson (1985) ser um resolvedor de problemas é ser capaz de agir operativamente sobre que possibilidades devemos seguir — deverei fazer isto, ou aquilo? No problema 41 do Bolt, ao iniciar a sua resolução, não temos muito mais que tentativa erro sem muitas opções informadas, daí começarmos a subdividir a rede, a experimentar preenchimentos ordenadamente e a distribuir os quadrados na rede de formas que nos parecem estratégicas levando, por exemplo, à análise das diagonais. Quando encontramos a primeira solução e prosseguimos, a atividade tornou-se generativa e a resolução de problemas pode neste sentido considerar-se operativa.

A experiência em resolução de problemas varia grandemente e a respetiva metacognição também, por isso mesmo Lester (1985) considera o modelo de Polya insuficiente, sendo necessário examinar as componentes da metacognição e as ações que as guiam. Mais ainda, comparando o conhecimento feito por alunos e matemáticos, ou educadores matemáticos, pesquisadores chegaram à conclusão que são conhecimentos muito diferentes e logo a ideia de ensinar estratégias não é, em geral, conseguida. Daí que a construção do currículo com base no ensino de estratégias não contribui significantemente para uma atividade que é generativa e reflexiva, como o é a atividade de resolução de problemas.

A componente cognitiva do currículo pode assim ser satisfeita pela atividade de resolução de problemas tendo cuidado o professor de não recontextualizar[2] a sua experiência na resolução de problemas nas salas de aula com os seus alunos (Palhares, 1995). Uma questão a investigar, que pode partir deste problema e outros semelhantes, é como podem os professores criar oportunidades para os seus alunos que levem à atividade de formulação dos problemas que contribuem para a resolução do problema a resolver. Ou seja, o que caracteriza esta atividade e em que ambientes se torna operativa.

Notas

[1] Na figura referida é apresentada uma outra solução que poderia reformular o problema de forma análoga à do Problema do Baltazar, ou seja, com mais de 3 quadrados por diagonal, por colorir.

[2] Palavra utilizada aqui com um sentido diferente do usado pelo autor no trabalho referido.

Referências

Bolt, B. (1996). *A caixa de Pandora da Matemática*. Gradiva.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Hillsdale: LEA Silver, E. A.: p. 41–70.

Palhares, P. (1995). Histórias com problemas construídos por futuros professores de Matemática. Em Fernandes, D., Lester, F., Jr., Borralho, A., & Vale, I. (ed) *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspetivas.* Lisboa: Gráfis.

Polya, G. (1985). *Como resolver problemas.* (2.ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. Em D. Grouws (ed) *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334–370) New York: MacMillan

Thompson, P. W. (1985). Experience, problem solving and learning mathematics: considerations in developing mathematics curricula. Em Edward A. Silver (ed) *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Hillsdale: LEA Silver, E. A.: p. 189–233.

von Glasersfeld, E. (1989). Cognition , the construction of knowledge and teaching. *Synthese* 80 (1):121–140.

Eduarda Moura