Acontecimentos independentes ou incompatíveis?

Vamos clarificar os conceitos!

Adelaide Freitas, Maria José Carvalho

Introdução

Em Portugal, o tema «Probabilidades e Combinatória» consta do currículo atual do 12.° ano de escolaridade. Entre os tópicos inseridos nesse tema estão acontecimentos incompatíveis e acontecimentos independentes. Na generalidade dos manuais escolares de Matemática, o conceito de independência de acontecimentos é trabalhado mas não é realçada a importância do sentido probabilístico desse conceito. Por outro lado, também é conhecido, da prática docente e vários estudos na área da Educação Matemática o têm revelado (por exemplo, Cunha, 2010; Díaz e de la Fuente, 2005; Sobreiro, 2011), que os conceitos de acontecimentos independentes e de acontecimentos incompatíveis suscitam dúvidas de interpretação e de raciocínio entre muitos alunos. A análise de um caso de estudo recentemente implementada por nós, que envolveu um grupo de 43 alunos do 12.° ano de duas escolas secundárias do distrito do Porto, confirmou essa realidade (Carvalho, 2013; Carvalho e Freitas, 2015). Da análise das respostas dadas pelos alunos a um conjunto de questões foi possível diagnosticar aplicações intuitivas e conexões erradas entre as noções de acontecimentos independentes e de acontecimentos incompatíveis por parte dos alunos.

Uma das formas de colmatar e dissipar falhas (frequentes ou não) nos alunos, reside em identificar os pontos chaves de conflitos e difundi-los pelo maior número de professores. Alertado para o ponto que origina o conflito, o professor estará melhor preparado para desenvolver, em sala de aula, estratégias dirigidas aos seus alunos com vista a eliminar previsíveis confusões e assim melhor clarificar os conceitos.

O nosso objetivo neste documento é realçar um dos pontos de conflito fulcral que identificámos na análise às respostas dadas pelos 43 alunos, abrangidos no caso de estudo que foi levado a cabo, nas questões envolvendo os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. Esperamos que esta divulgação de resultados seja útil a muitos docentes em futura lecionação daqueles dois conceitos.

Experiência

Colaboraram neste estudo os alunos do 12.° ano de duas turmas do Ensino Regular do Curso de Ciências e Tecnologias e de uma turma do Ensino Profissional, num total de 43 alunos de duas escolas secundárias do distrito do Porto, e imediatamente após estes alunos terem concluído o estudo do tema «Probabilidades e Combinatória».

Os 43 alunos em estudo responderam a uma prova de avaliação contendo oito questões com um total de 12 alíneas sobre probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. A seguir destacamos uma das questões (contendo 4 alíneas), com a respetiva resolução, envolvendo os conceitos de acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis.

Questão e respetiva resolução:

Um certo estudo numa maternidade revelou que a probabilidade de nascimento, naquela maternidade, de um menino varão é 0,55. Um casal com três filhos, todos nascidos naquela maternidade, é selecionado ao acaso. Admita que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos. Considere os acontecimentos:

A: «O casal ter no máximo uma rapariga»
B: «O casal ter filhos de ambos os sexos»
C: « O casal só ter rapazes»

Nos arredondamentos que efetuar tome 3 casas decimais.

a) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos.
Resolução: Defina-se o acontecimento

M: «Bebé nascido na maternidade ser menino».

Do enunciado, resulta:

$$P(\text{«Um filho do casal ser do sexo masculino»}) = \\ = P(M) = 0{,}55$$

e, consequentemente, para o acontecimento complementar,

M^C: «Bebé nascido na maternidade ser menina»,

tem-se: $P(M^C) = 0{,}45$. Dado um casal com 3 filhos, o espaço de resultados possíveis associado aos géneros dos três filhos (na sequência dos nascimentos) é:

$$\Omega = \{MMM,\ MMM^C,\ MM^CM,\ MM^CM^C,\ M^CMM,\ M^CMM^C,\ M^CM^CM,\ M^CM^CM^C\}$$

Uma vez que $P(M) \neq P(M^C)$, os acontecimentos M e M^C não são equiprováveis. Logo, os 8 acontecimentos elementares em Ω não são equiprováveis. As probabilidades pedidas, porque existe independência no sexo entre irmãos, são então calculadas do seguinte modo:

* $P(A) = P(MMM \cup MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) =$
$= P(MMM) + P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) =$
$= P(M)\ P(M)\ P(M) + P(M)\ P(M)\ P(M^C) +$
$+ P(M)\ P(M^C)\ P(M) + P(M^C)P(M)P(M) =$
$= 0{,}55^3 + 3 \times 0{,}55^2 \times 0{,}45 = 0{,}575$

* $P(B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM \cup MM^CM^C \cup$
$\cup M^CMM^C \cup M^CM^CM) =$
$= 1 - [P(MMM) + P(M^CM^CM^C)] =$
$= 1 - [(P(M)\ P(M)\ P(M) + P(M^C)\ P(M^C)\ P(M^C)] =$
$= 1 - (0{,}55^3 + 0{,}45^3) = 0{,}743$

* $P(C) = P(MMM) = 0{,}55^3 = 0{,}166$

b) Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.
Resolução:

$P(A \cap B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) =$
$= P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) =$
$= 3 \times (0{,}55^2 \times 0{,}45) = 0{,}408$
$P(A)P(B) = 0{,}575 \times 0{,}743 = 0{,}427$

Como, $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, A e B não são independentes.

c) Mostre que os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompatíveis.
Resolução: Uma vez que

$$(A \cap B) \cap C = \{MMM^C, MM^CM, M^CMM\} \cap \{MMM\} = \{\ \},$$

então os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompatíveis.

Outra resolução: $(A \cap B)$ e C são incompatíveis, uma vez que é impossível um casal de 3 filhos ter filhos de ambos os sexos, com apenas uma menina, e simultaneamente serem todos rapazes.

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique que os acontecimentos $A \cap B$ e C não podem ser independentes e apresente uma situação (com outras condições de enunciado) em que o poderiam ser.

Resolução: Como $A \cap B$ e C são incompatíveis então, $P((A \cap B) \cap C) = 0$.

Mas, $P(A \cap B)P(C) = 0{,}408 \times 0{,}166 \neq P((A \cap B) \cap C)$. Logo, $A \cap B$ e C não são independentes.

Uma situação hipotética em que poderiam ser independentes era admitir que um dos acontecimentos, $A \cap B$ ou C, tivesse probabilidade nula de ocorrência. Por exemplo, admitir que só se consideram casais com 3 filhos tendo pelo menos 1 menina. Assim, $P(C) = 0$.

Adaptações deste enunciado podem ser realizadas originando novos problemas com esquema de raciocínio análogo.

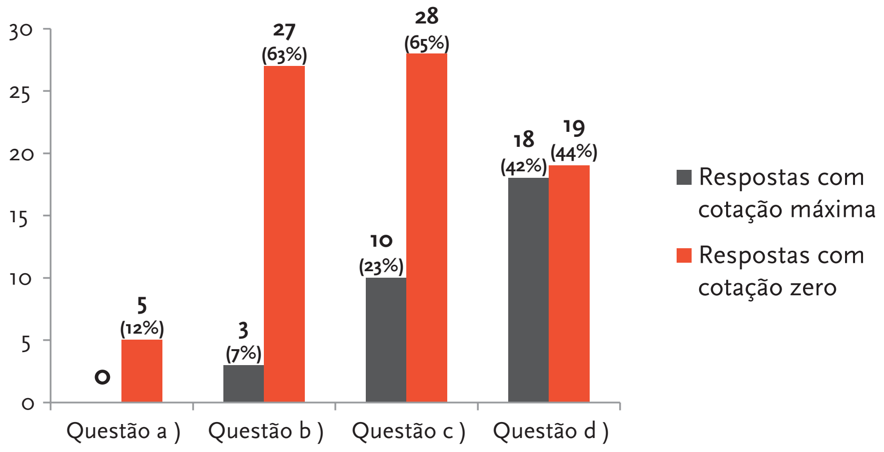

Figura 1.— Frequências das respostas dos alunos às questões apresentadas.

Análise das respostas

As respostas escritas obtidas pelos 43 alunos foram analisadas e avaliadas. Na Figura 1 encontram-se graficamente sumariadas as contabilizações de respostas corretas (cotação máxima) e de respostas com cotação zero (resposta deixada em branco ou nada do que estava escrito se aproveitava) atribuída a cada uma das 4 alíneas da questão.

As questões diretas sobre acontecimentos independentes e incompatíveis, questões b) e c), surgem como sendo as questões com maior percentagem com cotação nula. A questão a) envolvendo diversos conceitos como a reunião de acontecimentos incompatíveis e a independência de acontecimentos foi respondida corretamente por apenas 5 alunos dos 43 alunos. Um dos principais erros residiu na não observação da não equiprobabilidade dos resultados elementares. Uma vez que essa alínea a) envolvia o cálculo da probabilidade de três acontecimentos distintos, contabilizámos também quantos alunos responderam corretamente a cada um dos três acontecimentos pedidos. A Figura 2 ilustra a distribuição das contagens de respostas corretas efetuadas. Observa-se que dos acontecimentos pedidos, A, B e C, o acontecimento C é aquele que se regista um maior número de respostas corretas (14) no cálculo da sua probabilidade. Nota-se que dos três, é o evento C que se descreve de forma mais simples, envolvendo um número menor de resultados elementares. Assim, não é só na não equiprobabilidade dos resultados elementares que residem as dificuldades de cálculo mas também na definição dos resultados elementares que originam o acontecimento e/ou no cálculo da reunião de resultados elementares.

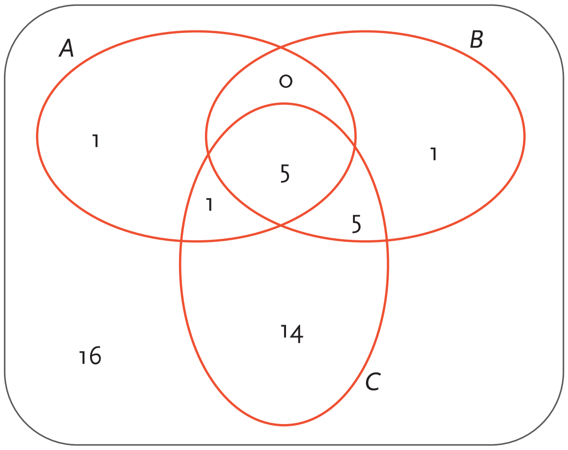

Figura 2.— Número de resultados corretos nos cálculos da probabilidade dos acontecimentos A, B e C.

Ainda nas respostas às questões b) e c), verificámos interpretações erradas e o uso incorreto de propriedades associadas às noções de independência e incompatibilidade. Nas Figuras 3–5 transcrevemos exemplos dos tipos de erros mais frequentes e que pretendemos alertar neste documento.

Analisando as respostas incorretas à questão da alínea b) sobre acontecimentos independentes, dois tipos de conflitos se destacaram, ambos derivados do estabelecimento de conexões erróneas com o conceito de acontecimentos incompatíveis, um entre as suas designações e outro com a interpretação. Para ambos os tipos registaram-se cerca de 30% dos alunos com pelo menos uma resposta nessas condições. Na Figura 3 apresentam-se três respostas incorretas. No primeiro caso, observa-se a mistura das designações *independência* e *incompatibilidade* talvez devida a alguma similaridade (sonora inicial) dos termos. Nas outras duas respostas, na Figura 3, evidencia-se a falta de referência à noção probabilística associada ao conceito de independência, o que revela confusão de interpretação desse conceito com o de incompatibilidade.

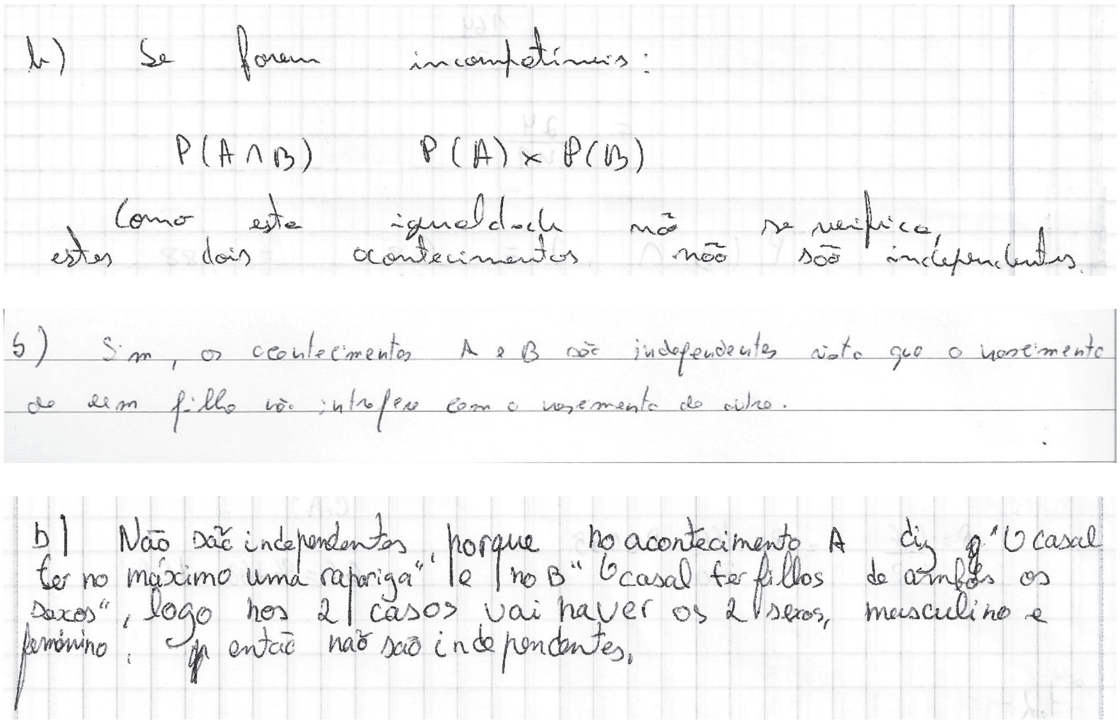

Figura 3.— Respostas dadas com conflitos na noção de independência.

Na realidade, sabemos que

$$\text{A e B são independentes sse } P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Mas, dado dois acontecimentos com probabilidades positivas, a forma melhor de interpretar o significado de independência desses acontecimentos é recorrendo ao facto de:

$$\text{A e B são independentes sse } P(A|B) = P(A), \quad \text{quando } P(B) > 0 .$$

O que se observou é que os alunos tendem a interpretar a igualdade $P(A|B) = P(A)$ como se fosse $A \cap B = \varnothing$ referindo apenas que a ocorrência de B não *interfere* na ocorrência de A, não clarificando o termo «interfere». Saliente-se que dizer «ocorrência de um acontecimento» corresponde a fazer referência apenas ao conjunto de elementos do espaço amostral que fazem parte do conjunto B, nada informando sobre a sua probabilidade de ocorrência. Assim, para justificar que A e B são independentes, tendo em conta que um dos acontecimentos, seja B, tem probabilidade positiva de ocorrência, deverá ser explicitado que a ocorrência de B não interfere, em termos probabilísticos, na ocorrência de A.

Relativamente à noção de incompatibilidade, as resoluções às questões c) e d) revelaram que, em geral, os alunos compreendem o conceito de acontecimentos incompatíveis e justificam a incompatibilidade recorrendo, não à definição, mas à condição necessária da probabilidade da interseção de acontecimentos incompatíveis ser nula. Na verdade, por definição,

$$\text{A e B são incompatíveis sse } A \cap B = \varnothing.$$

Assim,

$$\text{se A e B são incompatíveis então } P(A \cap B) = 0. \tag{1}$$

Portanto, $P(A \cap B) = 0$ é condição necessária para que A e B sejam incompatíveis. A verificação, apenas, desta condição necessária não é garantia dos acontecimentos serem incompatíveis. Já a sua não verificação é garantia dos acontecimentos não serem incompatíveis. De facto, da negação de (1), temos

$$\text{se } P(A \cap B) \neq 0 \text{ então A e B não são incompatíveis.}$$

Cremos que este jogo de raciocínio lógico envolvendo a condição $P(A \cap B) = 0$, que é apenas condição necessária mas não suficiente de incompatibilidade, leva à existência de conflitos na noção de incompatibilidade. Contabilizaram-se cerca de 20% dos alunos com pelo menos uma resposta com este tipo de conflito. Na Figura 4 estão dois exemplos de respostas observadas usando esse tipo de argumento, um que recorre ao cálculo da probabilidade da interseção para concluir a incompatibilidade, e o segundo que confunde o numeral zero com o conjunto vazio (acontecimento impossível).

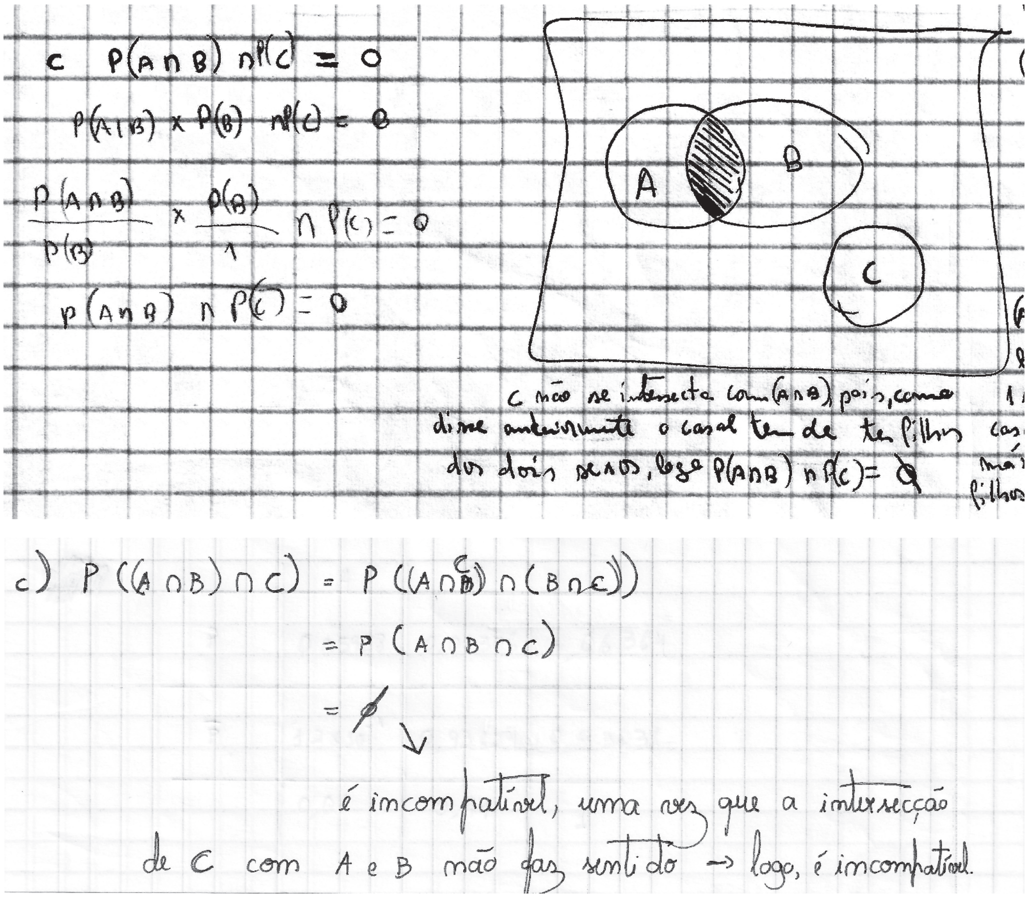

Figura 4.— Respostas dadas com conflitos na noção de incompatibilidade.

Conclusão

A análise das respostas dadas pelos 43 alunos sugere a existência de conflitos na noção de independência e na noção de incompatibilidade. A existência destas classes de conflitos revela a necessidade de se aprofundar tais conceitos em contexto escolar. As recomendações emergentes do estudo apontam para uma maior ênfase no caracter probabilístico associado à noção de independência em oposição à noção de incompatibilidade.

Nota final: Por questões legais e éticas foi previamente solicitada autorização para a realização da experiência, a recolha dos dados e a publicitação dos resultados às direções das escolas participantes e aos Encarregados de Educação dos alunos envolvidos no estudo.

Referências bibliográficas

Carvalho, M. J. (2013). *Ensino e aprendizagem de probabilidade condicionada e independência* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. Recuperada de: http://hdl.handle.net/10773/12044.

Carvalho, M. J., e Freitas, A. (2015), Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no Ensino Secundário português. *Relime* (aceite para publicação).

Cunha, M. C. (2010). *A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12.° ano de escolaridade em probabilidade* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade do Minho, Braga, Portugal. Recuperada de: http://hdl.handle.net/1822/10945.

Díaz, C., e de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245–260. Recuperada de: http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/

Sobreiro, D. (2011). *Probabilidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. Recuperada de: http://hdl.handle.net/10773/8547.

Adelaide Freitas

Departamento de Matemática e CIDMA,
Universidade de Aveiro

Maria José Carvalho

Agrupamento de Escolas António Sérgio,
Vila Nova de Gaia