

# A exploração de isometrias nas Pavimentações de Penrose numa turma de 8.º ano

JOÃO CARLOS TERROSO



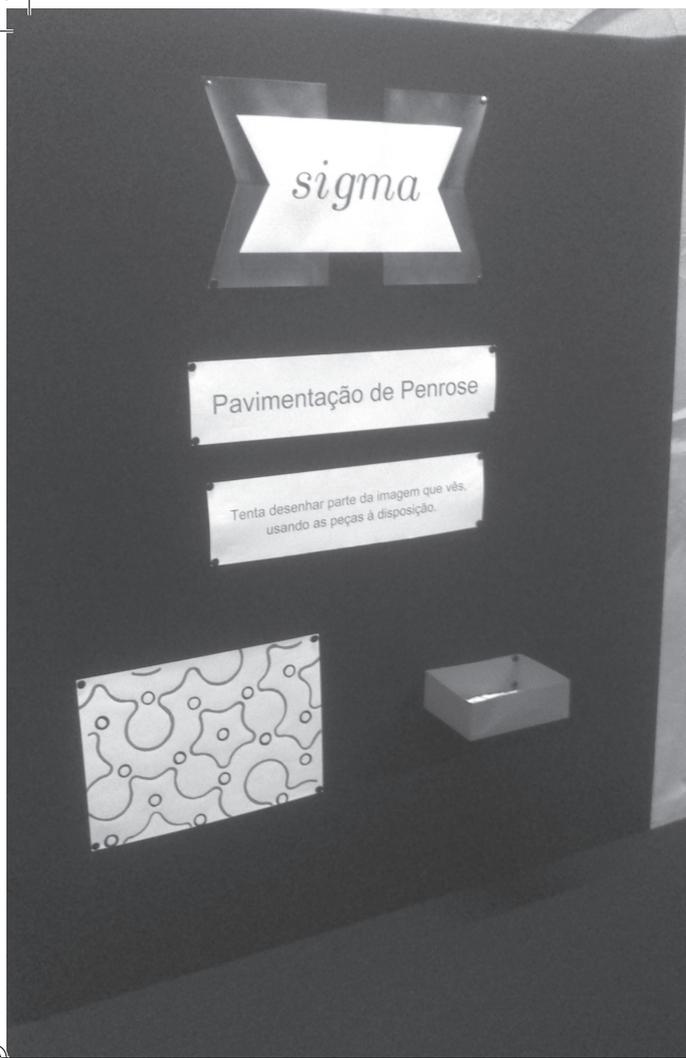
## UTILIZAÇÃO DA MATEMÁTICA RECREATIVA PARA A CONSOLIDAÇÃO DE CONHECIMENTOS

A matemática recreativa é um ramo desta ciência responsável pela resolução e desenvolvimento de puzzles e jogos matemáticos muito apreciados por todo o Mundo.

Roger Penrose, físico que atualmente leciona na Universidade de Oxford, desenvolveu, na década de 70, uma interessante e extensa investigação à volta de Pavimentações não periódicas (pavimentações que, quando submetidas a uma translação em qualquer direção ou sentido, nunca poderão coincidir com a pavimentação original). As pavimentações descobertas por Roger Penrose ficaram conhecidas por Pavimentações de Penrose.

A atividade aqui proposta desenvolveu-se na Escola Secundária Filipa de Vilhena, no âmbito da unidade curricular Iniciação à Prática Profissional <sup>[1]</sup> (IPP), no passado ano letivo. Numa primeira fase, o assunto foi alvo de divulgação científica através de um painel de matemática exposto à comunidade escolar: o «Sigma» (figura 1). Já numa segunda fase, decidimos promover uma atividade junto de uma das turmas da escola, a turma C do 8.º ano.

Neste artigo apresenta-se uma descrição de todas as etapas do projeto como forma de incentivo à sua futura recriação para os docentes desta disciplina.

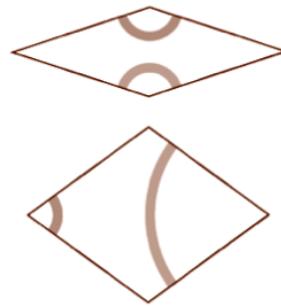


**Figura 1.**— O painel «Sigma» da Escola Secundária Filipa de Vilhena.

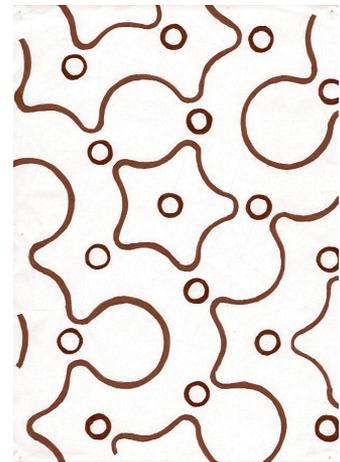
### O PAINEL «SIGMA»

O principal objetivo do painel «Sigma» é a divulgação e a promoção da matemática através do incentivo à resolução de problemas. Para tal, são propostas algumas tarefas interessantes e criativas, num dos principais locais de maior acessibilidade por parte da comunidade escolar, o átrio da entrada da escola.

O segundo desafio proposto no painel (cujo enunciado se apresenta mais à frente neste artigo), consistiu na reconstrução de uma pavimentação de Penrose, utilizando um par de protoladrilhos quadriláteros (figuras geométricas que permitem formar uma determinada pavimentação; Figura 2). Como, desta vez, foi colocada uma mesa junto ao painel, onde os alunos poderiam recriar esta pavimentação, conseguimos perceber que houve uma grande adesão por parte de toda a comunidade escolar. Surpreendentemente, todos os dias eram deixadas resoluções do desafio em cima dessa mesa, o que evidenciou o enorme sucesso desta atividade.



**Figura 2.**— Protoladrilhos da pavimentação de Penrose em estudo.



**Figura 3.**— Pavimentação de Penrose utilizada para a resolução da tarefa.

Aproveitando as potencialidades matemáticas da atividade desenvolvida, com a colaboração dos professores de matemática da escola, decidiu-se construir uma tarefa que tivesse como base o problema deste segundo painel «Sigma». Visto tratar-se de uma pavimentação, nada melhor do que integrá-la na evolução dos conhecimentos dos alunos do 8.º ano, contextualizando a tarefa no tema «Vetores, translações e isometrias», previsto no Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico.

### A CONSTRUÇÃO DA TAREFA «PAVIMENTAÇÃO DE PENROSE»

A tarefa foi idealizada tendo como base a exploração da pavimentação de Penrose do ponto de vista matemático e geométrico. O seu guião (figura 4) é constituído por uma pequena biografia introdutória de Roger Penrose e por 4 questões, às quais os alunos tiveram de responder, usando como recurso um par de protoladrilhos que constituem a pavimentação (figura 2 e 3).

Assim sendo, o material necessário para a aula (para além do material de escrita) foi: material de construção geométrica (régua, esquadros de geometria, etc.); 6 conjuntos de dois protoladrilhos base para a construção da pavimentação de Penrose; a pavimentação de Penrose recriada numa folha para ser exposta à turma; folhas de papel A4 brancas; colas; lápis de cor/marcadores/canetas coloridas; o guião da tarefa «Pavimentação de Penrose».

## TAREFA «PAVIMENTAÇÃO DE PENROSE»

**Roger Penrose**, nascido a 8 de agosto de 1931, é um físico matemático da Universidade de Oxford (uma das mais consagradas universidades do Mundo).

Para além de se dedicar ao estudo da Física, Penrose sente uma forte atração pela **matemática recreativa** (área da matemática dedicada à resolução de quebra cabeças e jogos matemáticos) que se estende ao longo da sua carreira.

As **pavimentações de Penrose** são **pavimentações do plano não periódicas** (ou seja, pavimentações em que se for realizada uma translação, segundo qualquer direção ou sentido, nunca será possível obter a pavimentação original).

Estas pavimentações foram alvo de estudo por parte de Penrose na década de 1970.

O objetivo do seu estudo foi sempre o de tentar encontrar pavimentações não periódicas com o menor número de peças base possível. Ora, o investigador foi, ao longo da sua carreira, descobrindo pavimentações não periódicas construídas à base de um número de mosaicos cada vez mais reduzido.

A pavimentação que consegues observar no painel «Sigma» é uma das pavimentações de Penrose e tem por base apenas dois mosaicos com a forma de quadriláteros losangos.

Com ajuda do teu grupo de trabalho, responde às seguintes questões, tendo por base a pavimentação de Penrose que vês representada.

**Questão 1:** Recorrendo às peças que te foram fornecidas, recria, numa folha A4 branca, a pavimentação de Penrose que consegues observar no painel «Sigma».

**Questão 2:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **verde**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma rotação.

Não te esqueças de identificar o centro de rotação e, com ajuda de um transferidor, medir o ângulo associado.

**Questão 3:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **vermelha**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma reflexão.

Não te esqueças de identificar o eixo de reflexão associado.

**Questão 4:** Com recurso a um lápis de cor, marcador ou caneta **azul**, pinta da mesma cor um par de peças que se podem obter, uma a partir da outra, através da realização de uma **translação**.

Desenha, na própria folha A4, o vetor associado a essa translação. De seguida, caracteriza esse vetor quanto à direção, sentido e comprimento (considera como unidade o centímetro).

**Figura 4.**— Tarefa «Pavimentação de Penrose» que foi aplicada na aula do 8.º ano da escola.

## DESENVOLVIMENTO DA AULA

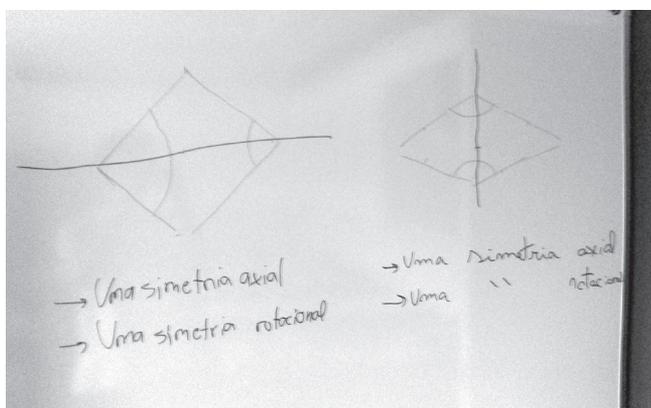
A turma do 8.º C da Escola Secundária Filipa de Vilhena era composta por 27 alunos, sendo uma turma caracterizada pela existência de alunos com diversos tipos de desempenho escolar (desde alunos com maior desempenho escolar, passando por alunos medianos, até alunos com algumas dificuldades de desempenho) e cujas aulas de matemática se caracterizavam pelo método de ensino expositivo.

Assim, a aula que se descreve no presente artigo trata-se de um primeiro contacto dos alunos desta turma com o tipo de ensino exploratório em contexto de sala de aula.

Na primeira parte da aula, o professor apresentou Roger Penrose à turma e discutiu com os alunos alguns fac-

tos sobre a sua biografia e sobre os estudos desenvolvidos pelo físico sobre pavimentações. Com grande curiosidade, os alunos escutaram atentamente a exposição feita pelo docente, fizeram questões (nomeadamente deu-se destaque ao despertar da curiosidade dos alunos sobre a definição e conceito de pavimentações não periódicas) e participaram ativamente, quando assim solicitados. Desta forma, estava instalado o ambiente para uma aula bem produtiva e interessante a todos os níveis.

De seguida, levou-se a cabo uma pequena exploração conjunta dos protoladrilhos da pavimentação de Penrose em estudo. Os alunos, com recurso aos dois protoladrilhos que originam a pavimentação, fizeram uma pequena carac-



**Figura 5.**— Registos efetuados pelos alunos no quadro.

terização das simetrias axiais e rotacionais das duas figuras planas, com a elaboração do respetivo registo de alguns apontamentos no quadro pelos próprios alunos (figura 5).

Estando a pavimentação e protoladrilhos que a constituem bem estudados, os alunos prosseguiram para o desenvolvimento da atividade matemática. Organizando-se em 6 grupos de trabalho, com 4 a 6 elementos, foi proposto aos alunos lerem com bastante atenção as questões da tarefa, analisarem o que era pedido e responderem às questões com recurso aos materiais fornecidos.

Ao longo da aula, os três professores presentes na sala prestaram assistência, esclareceram as dúvidas que foram surgindo (nomeadamente, em relação à interpretação das questões colocadas, montagem da pavimentação, dúvidas matemáticas em relação a cada uma das isometrias em estudo e no manuseamento do material geométrico utilizado, entre outras) e verificaram todo o trabalho que se desenvolveu dentro dos grupos de trabalho.

De uma forma bastante positiva, todos os grupos trabalharam de forma agradável e recetiva, sendo a comunicação matemática uma constante dentro dos grupos, onde havia uma ideia bastante clara no delinear de estratégias de resolução das questões propostas. «Não! Esta peça não cabe aí!» exclamou a certa altura um dos alunos. «Mas então como recuperar desse erro?» perguntava um dos professores.

Dou especial destaque à diversidade de estratégias (ou não estratégias) que os grupos decidiram adotar para a resolução da questão 1. Um conjunto de grupos optaram por começar por juntar peças aleatoriamente, enquanto que outros optaram por se debruçar numa área específica de referência da pavimentação.

Alguns conseguiram ser bem sucedidos na sua abordagem inicial. No entanto, os outros grupos, chegando a uma situação de impasse, optaram todos pela mesma estratégia de recurso: «... podemos começar por aquela estrela que se vê no centro da pavimentação».

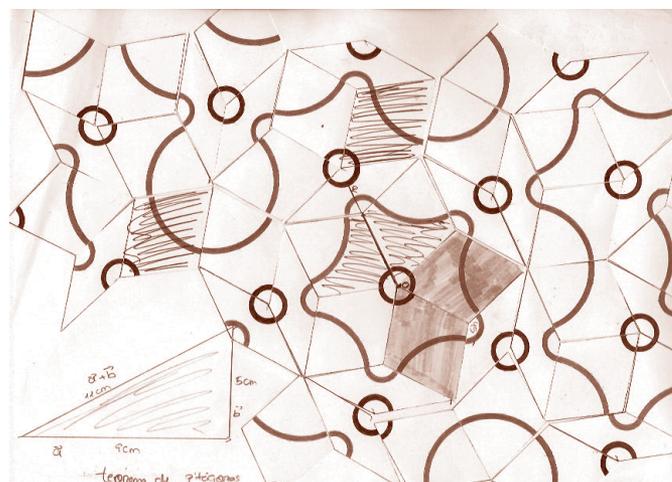
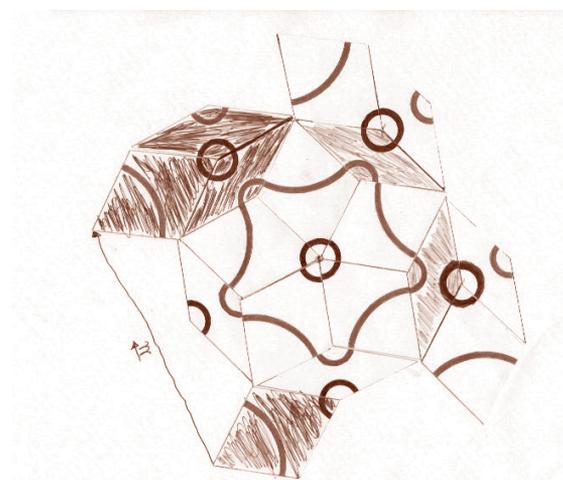
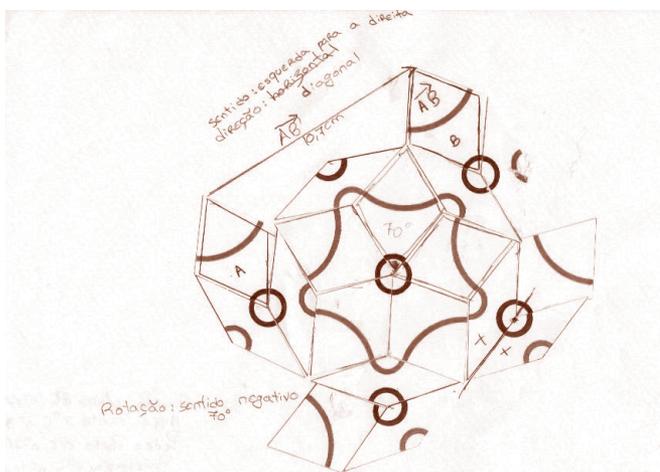
Num contínuo desenvolvimento do trabalho de grupo, os professores assistiram a interações ricas entre os alunos do ponto de vista da evolução do seu pensamento matemático, geométrico e estratégico na recriação do puzzle e resposta às questões colocadas:

- Alguns alunos não se lembraram de como se mediu a amplitude de um ângulo para a caracterização das rotações pelos grupos identificadas. Com ajuda dos professores, mas principalmente dos membros dos grupos, esta dificuldade foi ultrapassada.
- Nas translações, para identificar a medida do comprimento do vetor associado à translação, um dos grupos recorreu ao Teorema de Pitágoras. Desta forma, os alunos revelaram engenho e destreza, criando-se um momento de interessante discussão matemática.

Chegados à fase de discussão, o professor lançou um desafio à turma. Sem qualquer tipo de pré-preparação ou ensaio, os alunos foram convidados a apresentar os seus trabalhos e ideias aos restantes grupos. Claro está que tal desafio foi aceite com grande ânimo e entusiasmo.

Nas fase de apresentações, foi bastante interessante a envolvimento demonstrada por todos os alunos no trabalho que se estava a desenvolver. Os dois grupos convidados a apresentar foram muito bem sucedidos nesta tarefa. Responderam às questões que lhes foram colocadas na tarefa e apresentaram a sua folha de resposta, onde tinham recriado a pavimentação de Penrose. Os restantes alunos, que escutavam e assistiam com bastante atenção, no final das apresentações, participaram com questões e comentários que complementaram as ideias matemáticas e respostas dos dois grupos escolhidos. É de destacar que o último grupo a apresentar, solicitado por um dos professores, chegou mesmo a encontrar uma reflexão deslizante entre os protoladrilhos da pavimentação, o que a todos agradou e surpreendeu.

Como a tarefa foi bem agarrada e todos os intervenientes ficaram bastante entusiasmados com esta exploração, os alunos queriam continuar a aula com apresentações dos restantes grupos, o que não foi possível devido à falta de tempo. No final da aula, foram recolhidos alguns trabalhos que se encontram digitalizados neste artigo e que julgo serem interessantes para análise do leitor (figura 6).



**Figura 6.**— Folhas de resposta dos grupos de trabalho.

Também é importante esclarecer que esta turma não possui o hábito de realizar aulas exploratórias. Tendo em conta o quão bem os alunos trabalharam e interagiram durante a atividade matemática desenvolvida, fiquei surpreendido com toda a reação que tiveram a este tipo de trabalho em sala de aula.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

A resolução de problemas e de desafios exploratórios, em contexto de sala de aula, torna-se numa atividade crucial a ser desenvolvida na disciplina de Matemática.

Com a aplicação desta tarefa, os objetivos específicos da aula foram:

- Desenvolver a cultura matemática dos alunos.  
A exploração da cultura e história da matemática foi um dos objetivos cruciais na construção desta tarefa, sendo mais tarde vivenciada a aquisição por parte dos alunos dos conhecimentos explorados.

- Desenvolver os conhecimentos geométricos dos alunos relativamente às isometrias no plano.  
De uma forma indireta e recorrendo a conexões matemáticas, os alunos conseguiram explorar eficazmente as isometrias em figuras planas, sem que o tópico se tornasse aborrecido.
- Rever os conhecimentos mobilizados pelos alunos no tema «Vetores, translações e isometrias» já estudado no 1.º período do presente ano letivo.  
Com esta tarefa foi possível rever o tema referido, servindo a tarefa também como revisão da matéria, o que a todos agradou.

De facto, com a realização desta tarefa, vários episódios aconteceram em que, na minha perspetiva, fica claro que promover a atividade investigativa e exploratória nos alunos coloca-os no papel de principais agentes e dinamizadores da atividade desenvolvida em sala de aula, para além

de promover o desenvolvimento do gosto pessoal pela disciplina «papão» (figura 7).

Sem dúvida, esta é uma tarefa a promover novamente junto dos meus futuros alunos ao longo da minha futura carreira docente, que espero estar perto de se iniciar. Assim será, com toda a certeza... Pelo menos, esperança e sonhos não me faltam.

#### Nota

[1] Unidade curricular do Mestrado em Ensino da Matemática no 3.º ciclo e Ensino Secundário da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

#### Referências

- Santos, M. R. (2006). *Pavimentações do Plano: Um estudo com professores de Matemática e Arte* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, São Paulo.
- Grunbaum, B. (1987). *Tilings and Patterns*. New York: Freeman.

É uma atividade interessante e dinâmica. É um bom exercício para a prática de isometrias.

«É uma atividade interessante e dinâmica. É um bom exercício para a prática de isometrias.»

Gostei muito, foi muito divertido, foi a melhor aula da minha vida. Naquele dia até preferia estar na aula.

«Gostei muito, foi muito divertido. Foi a melhor aula da minha vida. Naquele dia até preferia estar na aula...»

Foi uma atividade diferente, interativa e engraçada. Esperamos mais aulas iguais a esta.

«Foi uma atividade diferente, interativa e engraçada. Esperamos mais aulas iguais a esta.»

**Figura 7.**— Composições escritas pelos alunos acerca da sua opinião sobre a atividade desenvolvida.

**JOÃO CARLOS TERROSO**

ESCOLA SECUNDÁRIA FILIPA DE VILHENA, PORTO

## MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

### Desporto no verão

A tarefa apresentada foi selecionada e adaptada de um conjunto de tarefas desenvolvidas, discutidas e aplicadas por um grupo de professores-acompanhantes no âmbito da formação do Plano da Matemática (2006–2012). Foi pensada para os alunos do oitavo ano, depois de terem estudado anteriormente os conceitos de moda, média e mediana, com o objetivo de trabalharem as medidas com sentido. Tendo em conta as vantagens da discussão dos cenários pedidos, considera-se a tarefa oportuna para trabalho de grupo (de

pares ou pequenos grupos) com discussão coletiva final. Pode ser integrada com outras tarefas estatísticas, nomeadamente recorrendo ao site PORDATA KIDS (cf. sugerimos nas páginas 24 e 25 deste número da revista).

**PAULO ALVEGA**

EBS PADRE ALBERTO NETO

AGRUPAMENTO DE ESCOLAS QUELUZ-BELAS