O desenvolvimento do pensamento algébrico num contexto de ensino exploratório: Um estudo com alunos do 4.º ano de escolaridade

Célia Mestre

Tradicionalmente, na escola de 1.º ciclo, a aritmética ocupa um papel predominante no currículo da Matemática. Muitas vezes os números e os cálculos algorítmicos têm primazia em detrimento da exploração de capacidades de pensamento de nível superior, como a generalização (Kaput, Carraher & Blanton, 2008). Esta capacidade é considerada por Kaput (1999) como intrínseca à atividade e pensamento matemáticos e, em particular, como aspeto central para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. A generalização pode ser representada de diversas formas: inicialmente, os alunos podem expressar as generalizações que observam no mundo com palavras e, gradualmente, usar formas mais simbólicas (Blanton, 2008).

A recente abordagem de investigação denominada *Early Algebra* promoveu uma nova visão da relação aritmética-álgebra, revelando o caráter algébrico da aritmética e questionando a prática corrente de ensinar primeiro aritmética e depois álgebra (Schliemann, Carraher & Brizuela, 2003). Isso não significa introduzir a álgebra mais cedo na escolaridade. Em vez disso, trata-se de uma abordagem que perspetiva a construção dos conceitos algébricos a partir dos tópicos já existentes no currículo da Matemática elementar, introduzindo-os através de problemas contextualizados e onde a notação formal é trabalhada gradualmente (Carraher, Schliemann & Schwartz, 2007). Trata-se, assim, de algebrizar os conteúdos já existentes do currículo matemático, fazendo com que os conteúdos aritméticos se tornem mais algébricos à medida que a generalização é construída (Kaput, 2008).

O pensamento algébrico pode ser entendido como um «processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade» (Blanton & Kaput, 2005, p. 413). De acordo com esta definição, Blanton (2008) identifica as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e pictóricos para descrever relações funcionais.

Ensino exploratório

A principal característica do ensino exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a sua gestão na aula proporcionando aos alunos momentos de discussão coletiva são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento.

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005) e, deste modo, a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que podem proporcionar aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998). De acordo com *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994), as tarefas matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a matemática, mostrar a matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer matemática. As tarefas são «um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos» (Ponte, 2005, p. 23).

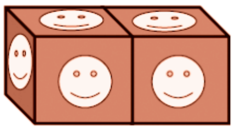
Baxter e Williams (1996, cit. Baxter & Williams, 2010) propõem a designação de «ensino orientado pelo discurso» (*discourse-oriented teaching*, no original) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a esforçarem-se a compreender as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemático de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que, em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo de aula é organizado de forma que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

De acordo com estas perspetivas foi conduzida uma experiência de ensino, ao longo de um ano letivo, com o objetivo de desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O estudo foi desenvolvido num contexto de ensino-aprendizagem exploratório,

Tarefas "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa nas construções seguintes e explica como pensaste.
   1.1. Três cubos.
   1.2. Quatro cubos.
   1.3. Dez cubos.
   1.4. Cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

Figura 1.— Enunciado da tarefa «Cubos com autocolantes»[1]

organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autonómo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Destes diferentes momentos, destaca-se o papel preponderante que assumiram as discussões coletivas. As aulas foram conduzidas por mim, no papel simultâneo de professora e investigadora.

Em seguida apresentam-se alguns momentos da discussão coletiva de uma das tarefas desenvolvidas na experiência de ensino — tarefa «Cubos com autocolantes». Com esta apresentação pretende-se refletir como a metodologia de ensino-aprendizagem exploratória adotada contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, mais concretamente no que respeita à importância que assumiram os momentos de discussão coletiva.

A DISCUSSÃO COLETIVA DA TAREFA «CUBOS COM AUTOCOLANTES»

A tarefa «Cubos com autocolantes», explorada numa fase final da experiência de ensino, apresentava uma sequência pictórica crescente com uma construção tridimensional envolvendo diferentes números de cubos interligados onde se colavam autocolantes nas faces visíveis. Pretendia-se que os alunos expressassem a relação entre o número de cubos de uma construção qualquer e o respetivo número de autocolantes, de forma a generalizar essa relação.

Na apresentação da tarefa, a situação foi modelada com o recurso a materiais concretos, elaborando-se conjuntamente com os alunos a construção apresentada no enunciado.

Durante o trabalho autónomo foram distribuídas aos diferentes grupos construções com dois e três cubos, com os autocolantes colados.

Após o momento de trabalho autónomo, seguiu-se a discussão coletiva. Um dos pares que apresentou a sua forma de resolução à turma era formado pelos alunos Carolina e Daniel. Este par apresentou várias representações diferentes: linguagem natural, tabelar e escrita simbólica.

O momento que se apresenta em seguida centra-se na discussão sobre a tabela apresentada pelo par. Esta tinha duas colunas, número de cubos e número de autocolantes, e era completada com diferentes exemplos. Na exploração dessa tabela, o par apresenta tanto uma leitura recursiva ao indicar a variação do número de autocolantes linha a linha como uma leitura que relaciona diretamente o número de cubos com o número de autocolantes. Na apresentação à turma, a investigadora solicita ao par que explique a tabela que construíram. Isso conduz a uma discussão sobre a diferença entre o número de autocolantes nos termos consecutivos da sequência e o valor constante que é adicionado.

Carolina — Nós pensámos, como no outro dia o grupo do Fábio fez uma tabela, assim mais ou menos como esta, e então pensámos que também podíamos fazer uma. E vimos a relação. Então fizemos duas colunas: uma com o número de cubos e outra com o total de autocolantes. O número de cubos é 9, 10, 11, 12, 13 e a relação é de um. No total de autocolantes a relação é de quatro. Aqui era de quatro, mas aqui estava sempre a fazer dois, também era de quatro.

Fábio — Essa parte não percebi.. era de dois e depois era de quatro?

Carolina — Sim, aqui era de quatro e aqui está sempre a ser dois...

Gonçalo — Não, simplesmente porque ali é vezes quatro...

Carolina — Sim, porque aqui está sempre dois, por isso é de quatro... se fizeres assim, sem o dois, assim nove vezes quatro é 36, e depois 10 vezes quatro dá 40, 42...

Gonçalo — Não, mas isso é só a tabuada do quatro. Nove vezes quatro era 36...

Rita — Vezes quatro é 36, juntando mais dois, como em todos junta mais dois, por isso é que dá mais quatro.

Gonçalo — Se tirares o mais dois é a tabuada do quatro.

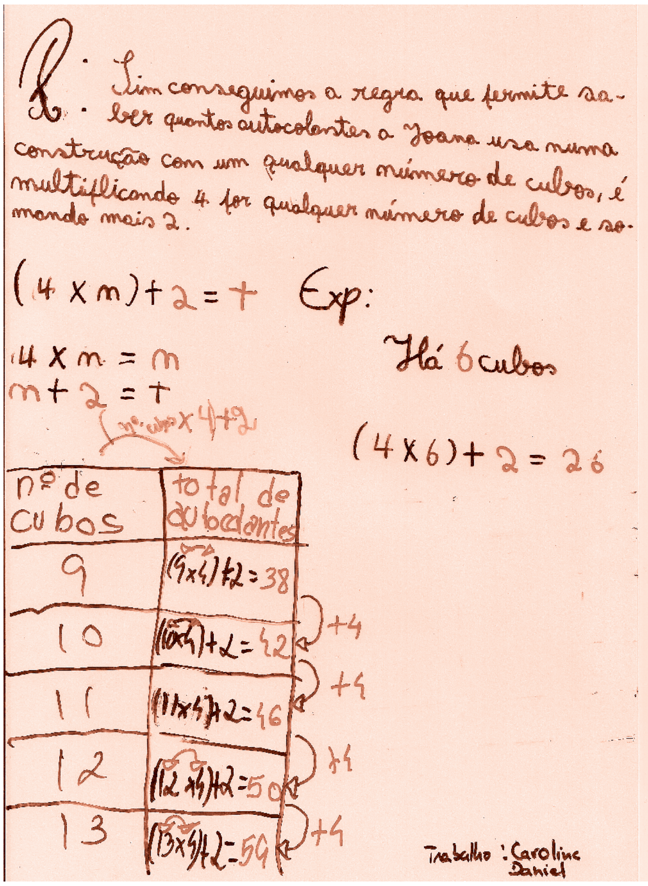


Figura 2.— Resolução do par Carolina e Daniel.

Carolina começa por referir uma característica interessante que foi sendo identificada ao longo da experiência de ensino: o facto de os alunos se apropriarem dos tipos de representação usados por outros grupos, procurando reproduzi-los nas tarefas seguintes. Assim, Carolina começa por referir que está a usar uma tabela como outro grupo já o tinha feito em uma tarefa anterior. Por outro lado, neste excerto destaca-se ainda o nível de pormenor com que esta aluna procura apresentar a forma de resolução do seu grupo, identificando os procedimentos usados e as conclusões a que chegaram. Para além disso, é evidente a forma como outros colegas interpelam Carolina, procurando perceber a sua forma de resolução.

Nesta fase da discussão, a investigadora procura que os alunos justifiquem o porquê das regularidades identificadas através da exploração da tabela. Conduz, nesse sentido, a discussão coletiva na turma.

Investigadora — Porque é que é sempre mais quatro?

Fábio — Porque se faz sempre vezes quatro...

Investigadora — Mas porquê?

Carolina — Porque nove vezes quatro dá 36, depois com o dois, 38; 10 vezes quatro, 40, junta-se o dois, 42, é o dois que está a fazer isto...

Investigadora — O dois está a fazer isto. Mas porque é que tu dizes ali, vocês têm ali as setinhas, mais quatro, mas porquê mais quatro e não outra coisa qualquer?

Carolina — Porque a diferença é de quatro.

Investigadora — Mas porquê?

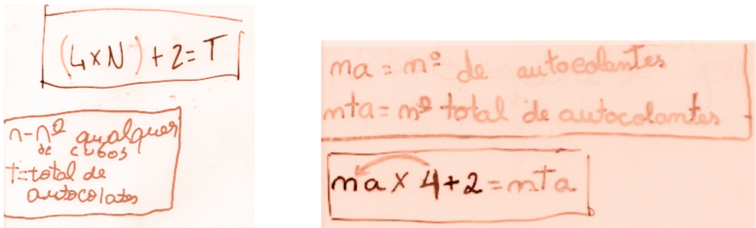


Figura 3.— Comparação entre as resoluções do grupo do André, Gonçalo e Joana e do grupo da Rita, Diogo e Beatriz.

Rita — Porque foi assim, eles fizeram nove vezes quatro, é 36 e o 36 faz parte da tabuada do quatro, mas eles puseram mais dois, se eles no próximo metessem mais três já não seria mais quatro... porque é sempre o mesmo número.

Investigadora — Mas eles fizeram e fizeram corretamente... A minha pergunta é porque é que neste problema, nesta situação....

Rita — Porque há quatro lados nos cubos.

(...)

João V. — Porque tem quatro lados.

Investigadora — O que é que tem quatro lados?

João V. — Sim, quatro faces.

Investigadora — Mas o cubo tem quatro faces?

Vários alunos — Não, tem seis...

João V. — Mas é menos uma que fica tapada e depois é menos a outra do outro que também fica tapada.

Neste excerto é evidente como o questionamento da investigadora procura levar os alunos a justificarem as regularidades que identificaram na situação, como é o caso de multiplicarem sempre por quatro. Em conjunto, os alunos conseguiram concluir que isso se devia ao facto de terem sempre quatro faces visíveis de cada cubo com autocolantes.

Em seguida, dois grupos apresentam as suas resoluções. Estes dois grupos apresentavam a escrita da regra em linguagem simbólica e de forma muito semelhante. No entanto, o primeiro considerava o número de cubos como a variável independente e o segundo considerava ser o número de autocolantes essa variável. Esse facto suscita uma interessante discussão na turma, que se apresenta em seguida.

Gonçalo — No nosso está a dizer que é um número qualquer de cubos e o dela é um número qualquer de autocolantes... Mas vai dar ao mesmo... Saber o número qualquer de autocolantes ou o número qualquer de cubos é a mesma coisa...

Investigadora — É?

Gonçalo — Então é assim: aqui há três cubos e os *smiles* de cima... então estes são os *smiles* de cima e são três cubos e três *smiles*. Tínhamos falado que os *smiles* é três vezes quatro, viste os *smiles* de cima, mas se souberes os três cubos também vai ser três vezes quatro.

Investigadora — Mas o número de autocolantes dessa construção é igual ao número de cubos?

Gonçalo — Não professora, mas só que a Rita estava a dizer que só contava os de cima, que era os de cima vezes quatro, então os de cima são três e há três cubos, então os três autocolantes de cima é a mesma coisa que os três cubos.

(...)

João V — É a mesma coisa.

Investigadora — É a mesma coisa... mas...

João V. — Só que explicado de maneiras diferentes...

Investigadora — É a mesma coisa, mas acho que temos de ter um cuidadinho aí...

Carolina — Eu acho que o da Rita e o do Gonçalo são a mesma coisa... porque se soubéssemos o número de autocolantes tínhamos de contar o número de cubos e se soubéssemos o número de cubos tínhamos de contar o número de autocolantes...

(...)

Investigadora — Agora eu acho que... há um cuidado quando nós usamos ali um número qualquer de autocolantes, acho que temos de ter um cuidado especial ali...

Gonçalo — Ali ela falou que era o de cima, mas se for o da frente também são três autocolantes e três cubos.

João V. — Tanto faz.

Investigadora — Ok, e se for o número total de autocolantes?... Não é também o número de autocolantes?

Vários alunos — É.

Investigadora — Então, o que falta dizer ali? Número de autocolantes...

João V. — E cubos.

Fábio — Não, número de autocolantes de cima.

Investigadora — De cima, de uma face...

Neste excerto os alunos começam por não reconhecer a diferença entre as duas representações simbólicas que usaram para expressar a relação entre o número de autocolantes e um número qualquer de cubos. Ao longo desta discussão, a investigadora conduz os alunos a percecionarem as diferenças entre as duas representações, impelindo-os ainda a reconhecerem a necessidade de serem claros na forma como identificam as diferentes variáveis.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pelos pequenos excertos apresentados pode constatar-se que os alunos participaram na discussão coletiva, assumindo um papel ativo tanto na explicação das suas formas de resolução como na compreensão das explicações dos colegas (Baxter & Williams, 2010). Desta forma, os momentos de discussão coletiva permitiram a construção de aspetos pertinentes para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

Importa referir que tarefas como a apresentada, com a exploração de sequências pictóricas crescentes, podem ser muito significativas para a promoção do pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente na vertente do pensamento funcional por facilitarem a identificação da relação entre as variáveis. O contexto pictórico visual permitiu atribuir sentido às diferentes variáveis e tornar mais explícitas as relações entre elas, para além de, no caso concreto desta tarefa, permitir distinguir o que era constante e o que variava na sequência. Estes aspetos são importantes para a construção da compreensão das relações funcionais, que podem emergir desta forma neste nível de ensino.

No entanto, é pela sua exploração em sala de aula e pela atividade que os alunos realizam e a reflexão que produzem que poderemos considerar as aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005). Para tal, e no respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, é importante que os professores desenvolvam olhos e ouvidos algébricos (Blanton & Kaput, 2005) para que integrem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Assumindo a complexidade inerente a todo este processo, é razoável conceber que o que se apresenta neste texto apenas reflete parcialmente o ambiente de aprendizagem vivido em sala de aula. De facto, as situações de construção de aprendizagens são demasiado ricas para se compactarem em tão limitada imagem, pois todos os momentos da aula são entendidos como oportunidades para a construção do conhecimento matemático, numa perspetiva dialógica. No entanto, pelas opções tomadas enquanto professora-investigadora e pela forma como os alunos reagem a esta prática de ensino, pode considerar-se que os resultados de uma vivência tão intensa contribuirão não só para uma construção da identidade matemática de cada aluno, como para a evolução do seu desenvolvimento integral enquanto cidadãos.

Nota

[1] Tarefa adaptada de Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005).

Referências

Baxter, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education*, *13*, 7–26.

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, Transforming Practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), Algebra in the Early Grades. Mahwah, NJ, Erlbaum, pp. 235–272.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema &T. Romberg (Orgs.), Mathematics classrooms that promote understanding (pp. 133–155). Mahawah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). Algebra in the early grades (pp. xvii–xxi). New York: Lawrence Erlbaum Associates & NCTM.

Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics. http://www.brookings.edu/gs/ brown/algebraicreasoning.htm.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2003). Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice. Studies in Mathematical Thinking and Learning Series. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*, 268–275.

Célia Mestre

Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada