

O problema do ProfMat 90

Pedro Esteves

Enquanto decorria o encontro anual da A.P.M. nas Caldas da Rainha, foi colocado à arte dos participantes o problema "Os dois campistas mentirosos". Dezoito corajosos matemáticos arriscaram os seus nomes. Três responderam em equipa, um propôs duas soluções separadas e outro apresentou, de uma só vez, quatro versões e comentários finais.

A grande maioria das respostas bascou-se na seguinte **opção pragmática do guia**: *3 campistas seguirão pela 1ª vereda, 3 pela 2ª, 2 pela 3ª e ele próprio pela 4ª*. O modo como, nessas respostas, está demonstrado que essa opção é suficiente para fundamentar uma boa decisão do guia ao fim dos 40 minutos de exploração das veredas é que varia.

Uma maneira de catalogar as demonstrações dos nossos problemistas é: se são estudadas todas as hipóteses por intermédio de uma "árvore", tal como um computador faria, a demonstração é do tipo "exaustiva"; se são afastadas previamente várias hipóteses, mediante raciocínios simples, e/ou se as hipóteses são agrupadas por forma a permitir que os encadeamentos dedutivos sejam feitos sobre conjuntos de hipóteses, então a demonstração é do tipo "heurístico".

Como ninguém se situa em absoluto num destes extremos e porque alguns dos solucionistas pura e simplesmente

não demonstraram as suas conclusões e portanto estas não podem ser catalogadas relativamente, o melhor é começar por apreciar algumas das contribuições mais originais independentemente da estrutura de cada resposta individual.

Os dois representantes mais próximos da **via exaustiva**, Jaime Carvalho e Silva (J.C.S.) e José S. Fernandes (J.S.F.), utilizaram a mesma ideia base para a organização das hipóteses que se podem deparar ao guia (sem que este saiba perante que caso está): ou ninguém mente, ou apenas um mente, ou há dois a mentir.

J.C.S. pormenoriza um pouco mais a última possibilidade: ou os dois mentirosos estão no mesmo grupo, ou estão separados. Deste modo, J.C.S. inventaria num quadro (adiante adaptado) as hipóteses constantes do quadro 1.

A seguir J.C.S. elimina todas as configurações das respostas dos oito campistas em que ou surge um SSS ou dois grupos NNN (pela evidência do seu

Os dois campistas mentirosos...

Oito jovens campistas e o seu guia estão perdidos no interior de uma floresta ao fim da tarde. Exactamente uma hora antes de ser noite cerrada e de já não se poder caminhar na floresta, chegam a um ponto de onde saem quatro veredas, uma das quais - mas não se sabe qual! - conduz ao acampamento em 20 minutos.

A solução para o guia parece ser mandar seguir durante 20 minutos pequenos grupos - onde ele próprio se pode incluir - pelas várias veredas, voltarem à intersecção dos caminhos ao fim de quarenta minutos, já sabendo então qual a vereda a tomar, e depois gastarem os últimos 20 minutos da hora a dirigirem-se todos ao acampamento. O problema é que o guia sabe que dois dos oito jovens campistas - embora não saiba exactamente quais! - dizem mentiras de vez em quando... Como poderá o guia descobrir assim a boa vereda?

(em "Público Magazine", 4/11/1990, página semanal de "Desafios" a cargo de Eduardo Veloso e José Paulo Viana)

Quadro 1

		Pergunta: "O teu caminho é bom"?		
		Respostas dos oito campistas, organizadas por grupos de 3 + grupo de 3 + grupo de 2		
Ninguém mentiu		SSS+NNN+NN	NNN+SSS+NN	NNN+NNN+SS
Um mentiu		NSS+NNN+NN	SNN+SSS+NN	SNN+NNN+SS
		SSS+SNN+NN	NNN+NSS+NN	NNN+SNN+SS
		SSS+NNN+SN	NNN+SSS+SN	NNN+NNN+NS
Dois mentiram...	...e estão juntos	NNS+NNN+NN	SSN+SSS+NN	SSN+NNN+SS
		SSS+SSN+NN	NNN+NNS+NN	NNN+SSN+SS
		SSS+NNN+SS	NNN+SSS+SS	NNN+NNN+NN
	...e estão separados	NSS+SNN+NN	SNN+NSS+NN	SNN+SNN+SS
		NSS+NNN+SN	SNN+SSS+SN	SNN+NNN+NS
		SSS+SNN+SN	NNN+NSS+SN	NNN+SNN+NS

significado para o guia) e restam-lhe 15 casos, bem distintos, portanto "um catálogo sem ambiguidades dos três possíveis caminhos para o acampamento"; se a cada S fôr atribuída 1 unidade, cada caso é transformável num número escrito na base 3:

- NSS+NNN+NN → 200
- NNS+NNN+NN → 100
- NSS+SNN+NN → 210
- NSS+NNN+SN → 201
- NNN+NSS+NN → 20
- NNN+NNS+NN → 10
- SNN+NSS+NN → 120
- NNN+NSS+SN → 21
- SNN+NNN+SS → 102
- NNN+SNN+SS → 12
- SSN+NNN+SS → 202
- NNN+SSN+SS → 22
- SNN+SNN+SS → 112
- SNN+NNN+NS → 101
- NNN+SNN+NS → 11

sendo cada número característico de um único caso.

Enquanto J.C.S. se entusiasmou com esta construção, deixando o guia numa posição bem embaraçosa ("o guia tem então apenas que construir este catálogo, ouvir as respostas e indicar instantaneamente qual o caminho certo!"), J.S.F. foi mais cuidadoso e, após um percurso demonstrativo diferente, procurou uma conclusão fácil de aplicar ("para uma decisão rápida do guia aquando do regresso dos diferentes grupos"): se "Dos dois grupos de três um é unânime e o grupo de dois é unânime - as más respostas são verdadeiras, ignorando-se a resposta do outro grupo

de três"; se "Os dois grupos de três são unânimes - as suas respostas são verdadeiras, ignorando-se a resposta do grupo de dois"; se "Nos dois grupos de três há, em cada um, um discordante - as suas respostas são verdadeiras, aliás, também é verdadeira a resposta do grupo de dois"; se "Num dos grupos de três e no grupo de dois há, em cada um, um discordante - tomam-se como verdadeiras as respostas dos dois grupos de três ignorando-se a resposta do grupo de dois", entendendo-se sempre como "resposta" de um grupo a que resulta duma unanimidade ou de uma maioria"; assim o guia pode juntar à resposta que conhece sobre o caminho que explorou pessoalmente pelo menos mais duas respostas verdadeiras sobre os outros três caminhos, o que é suficiente para decidir.

Como pensaram os problemistas que seguiram a **via heurística**?

Houve entre as respostas dadas três tipos básicos de intuição:

- a) partir das indicações dadas acerca dos bons/maus caminhos;
- b) partir das unanimidades/divergências verificadas na opinião dos três grupos de campistas;
- c) especular sobre os casos que poderiam surgir conforme não se tenha verificado nenhuma mentira, ou só uma mentira, ou as duas possíveis.

A 1ª versão de Margarida Graça (M.G.) é um misto dos tipos a) e b):

"1- Só um grupo indica o "bom"

caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo;

* os "mentirosos" não mentiram nesse dia;

* o monitor deve dirigir-se pelo caminho indicado.

2 - Nenhum grupo indica o "bom" caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo,

* os mentirosos estão ambos a mentir, estão juntos e sozinhos no grupo de dois;

* o grupo de dois mente;

* o monitor deve dirigir-se pelo caminho onde foi o grupo de dois.

3 - Dois grupos indicam o "bom" caminho:

* todos estão de acordo em cada grupo;

* os mentirosos estão ambos a mentir, estão juntos e sozinhos no grupo de dois;

* o grupo de dois mente;

* o monitor deve seguir a indicação do "bom" caminho do grupo de três.

4 - Há um grupo que não se "entende" quanto à resposta a dar:

• se é um grupo de dois:

* só um mentiroso mente nesse dia;

* o monitor deve ignorar a resposta desse grupo e tomar em conta as respostas dos outros grupos para tirar conclusões;

* consegue-se saber qual o "mentiroso";

Os problemistas

Ana Paula Alves

Cristina Viegas Henriques

Dalva Domingues

Inês Queiroz

Isabel Brandão

Isabel Costa

Jaime Carvalho e Silva

José Freire Ferreira

José M. Duarte

José S. Fernandes

Margarida Graça

Maria Amélia Pereira

Maria Fernanda Mendes

Maria Teresa Sanches

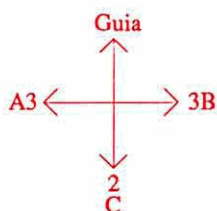
Olga Gomes Coelho

Paulo Silva Simões

Pedro Almeida

Rijkje Dekker

Quadro 2



1	Os 3 de A concordam Os 3 de B concordam	⇒	A determinado* B determinado Guia determinado	⇒ C det.
2	Os 3 de A não concordam Os 3 de B não concordam	⇒	1 mentiroso em A ⇒ A det.** 1 mentiroso em B ⇒ B det. Guia det.	⇒ C det.
3a	Os 3 de A concordam Os 3 de B não concordam Os 2 de C não concordam	⇒	A det. 1 mentiroso em B ⇒ B det. 1 mentiroso em C Guia det.	⇒ C det.
3b	Os 3 de A concordam Os 3 de B não concordam Os 2 de C não concordam	⇒	A det. pelo menos um de C diz a verdade ⇒ C det.*** Guia det.	⇒ B det.

* número de mentirosos ≤ 2 ⇒ se 3 concordam os 3 det.
 ** número de mentirosos = 1 ⇒ 2 dizem a verdade ⇒ 3 det.
 *** se os dois concordam e 1 diz a verdade ⇒ os 2 dizem a verdade ⇒ 2 det.

- se é um grupo de três:
 - * ignora-se a posição desse grupo e como no caso anterior o monitor deve considerar as respostas dos outros grupos e tirar conclusões;
 - * consegue-se saber quem mente.
- 5 - Há dois grupos que não se entendem:
 - * os mentirosos estão ambos a mentir e em grupos separados;
 - se é um grupo de três e um grupo de dois:
 - * o monitor deve considerar a opinião da maioria do grupo de três e excluir a do grupo de dois;
 - dois grupos de três:
 - * o monitor deve considerar a opinião da maioria em cada grupo."

No tipo b) inclui-se a solução de José M. Duarte, (J.M.D.), em dois grupos; só há um problema num grupo; não há polémica em nenhum grupo - e desenvolve as casas que nelas estão contidas, tirando claras conclusões.

Mas a resposta que melhor ilustra a

utilização deste segundo tipo de intuição e que ao mesmo tempo é a formalmente mais elegante e a mais económica (embora não se preocupe com os aspectos práticos da conclusão - guia sofre!) é a de Rijkje Dekker, reproduzida na íntegra (traduzida do original inglês) no quadro 2.

Grupos			Falam verdade além do guia	Para conhecer a verdade sobre 3 caminhos e, portanto, sobre o outro
de 2	de 3	de 3		
U	D	D	o grupo U e 2 elementos de cada grupo D	tomar como verdade a maioria nos grupos D
U	D	U	os grupos U	—
D	D	U	o grupo U e dois elementos do grupo D	tomar como verdade a maioria nos grupos D
D	U	U	os dois grupos de 3	
U	U	U	os dois grupos de 3	

U = unanimidade ; D = divergência

Quadro 3

Finalmente, o último tipo aproxima-se da forma usada pelos solucionistas "exaustivos" e esteve na base da 2ª versão apresentada por M.G.

Integrando-se nas soluções baseadas numa intuição do tipo b) e preocupando-se com a **apresentação final** dos resultados, de modo a estes serem facilmente legíveis e rapidamente utilizáveis, as soluções de Paulo Lopes Simões e de Maria Fernanda Mendes, muito parecidas, são a seguir reunidas num único quadro adaptado (v. quadro 3). Estas duas soluções convergem com a de J.S.F.

Um outro quadro bem curioso foi proposto por Isabel Brandão, Dalva Domingues e Olga Coelho, que trabalharam em equipa.

Utilizando E.V.C. como abreviatura de "Encontrei a Vereda Correcta", propõem ao guia, para o caso dele próprio não encontrar a V.C., que siga pela vereda experimentada:

- por um dos grupos de três em que:
 - * todos afirmem E.V.C.;
 - * apenas dois afirmem E.V.C. desde que não mais de um outro campista o afirme;
 - * apenas um afirme E.V.C. desde que ninguém mais o afirme;
- pelo grupo de dois em que:
 - * ambos afirmem E.V.C. e mais nenhum grupo seja unânime a afirmá-lo;
 - * apenas um afirme E.V.C. desde que não mais de um outro campista o afirme;
 - * ninguém afirme E.V.C.."

Uma solução bastante sintética baseada no simples discurso e que combina muito bem a demonstração (elementar) e a informação prática (para o guia) é a de José Freire Ferreira, da qual se reproduz um extracto ilustrativo:

“Se há desacordo apenas num grupo de três: tanto faz que minta um ou dois, o guia não o ouve e assume as opiniões dos outros grupos.

Se há desacordo num grupo de três e no grupo de dois: então um (e só um) mentiroso está no grupo de três e percebe-se a opinião correcta (da maioria [= 2]). Além disso, desmascara-se o mentiroso do grupo de dois.”

Mas ... teria sido a opção 1+2+3+3 do guia uma **opção necessária**?

Curiosamente, apenas em duas das respostas há traços de preocupação em relação a esta questão:

- numa das versões de M.G. surgem, sem qualquer comentário (como se de um rascunho se tratasse), as hipóteses do quadro 4.

- na resposta de J.M.D. começa por estar escrito:

“O ideal para o guia seria explorar uma vereda e enviar equipas de cinco jovens para as outras veredas. É que em cada equipa de cinco, mesmo que os dois “mentirosos” lá estivessem e mesmo que os dois “mentirosos” estivessem de facto a mentir, a maioria de três “verdadeiros” falaria verdade, e poderia confiar-se no depoimento da maioria (que seria seguramente verdadeira).

O único “contra” deste método é que é impossível de aplicar, porque não há $2 \times 5 = 10$ jovens, mas apenas 8; mas nada mais diz sobre as outras possibilidades e passa imediatamente à configuração já conhecida (1+2+3+3).

Consultando a solução proposta pelos autores do “desafio” (em “Público Magazine” de 11/11/90), também aí não está demonstrada a unicidade obrigatória da configuração dos grupos de pesquisa das veredas. Nem sequer no original de onde o problema foi retirado, “The Puzzling Adventures of Dr. Ecco”, de Dennis Shasha (1988).

Quem querará contribuir com uma demonstração de que a configuração 1+2+3+3 *além de suficiente, é uma*

caminhos	$\frac{A B C D}{3 3 3 0}$	ou	$\frac{A B C D}{4 4 1 0}$	ou	$\frac{A B C D}{1 2 3 3}$
nº de caminheiros					
			↙	↘	
			monitor		

Quadro 4

condição necessária?

E para terminar: este problema também deu oportunidade à boa disposição, à rebeldia contra a artificialidade das condições que o tornam “problema” e até ao desabafo.

Aí vão alguns extractos:

“Ordem do monitor: um dos elementos do grupo que chegar ao acampamento deve trazer a bandeira” (M.G., versão zero);

“Devo dizer que os campistas que encontram o acampamento devem logo aí ficar. (...) Se um campista mentiroso não encontrar o acampamento vai regressar necessariamente, pois pode ser mentiroso mas não é burro de certeza: não vai querer passar a noite ao relento (haverá feras?). O problema está quando o mentiroso encontra o acampamento mas regressa mesmo assim para enganar o guia. (...). Se o mentiroso está no grupo

de dois, só surge um problema quando os dois elementos desse grupo são ambos mentirosos e regressam ambos. Mas então, o guia sabendo que um dos caminhos leva ao acampamento, exclui os caminhos dos grupos de três, pelo que, por exclusão de partes deixa o caminho de dois como o caminho certo (e, descobertos, os mentirosos ficam sem sobremesa uma semana inteira!).” (J.C.S.);

“Senti-me “inibida” em resolver o problema por ter sido dedicado aos professores de Matemática e colocado por *vocês*. Fiquei desconfiada e insegura.

Considero que percebi que este problema é interessante para formação de professores porque a solução é fácil, encontrar um *processo* simples e sintético é que é o verdadeiro problema.

(...). (M.G.).

Pedro Esteves
Esc. Sec. do Seixal

Os vencedores

O júri, constituído por Eduardo Veloso, José Paulo Viana e Pedro Esteves, considerando a existência de várias respostas de qualidade semelhante, resolveu atribuir o prémio a três soluções, da autoria de:

- Margarida Graça
- Maria Fernanda Mendes
- Rijkje Dekker

O prémio atribuído, como tinha sido anunciado, é o livro “100 Problemas Numéricos”, de Pierre Berloquin, oferecido pela Editora Gradiva.

Interessa-se por problemas?

Na APM existem várias publicações sobre problemas: *O Problema da Semana; Jogos, Enigmas e Problemas; Mais Jogos, Mais Enigmas e Mais Problemas; Viagem de Ida e Volta*. Além disso, incluem muitos problemas os livros *O Geoplano na Sala de Aula, as Calculadoras na Educação Matemática* e a agenda do professor 1990/1991, *Dia-a-dia com a Matemática*. Peça as publicações da APM pelo correio. Consulte a pág. 2 desta revista para saber como isso se faz. Descontos para sócios.