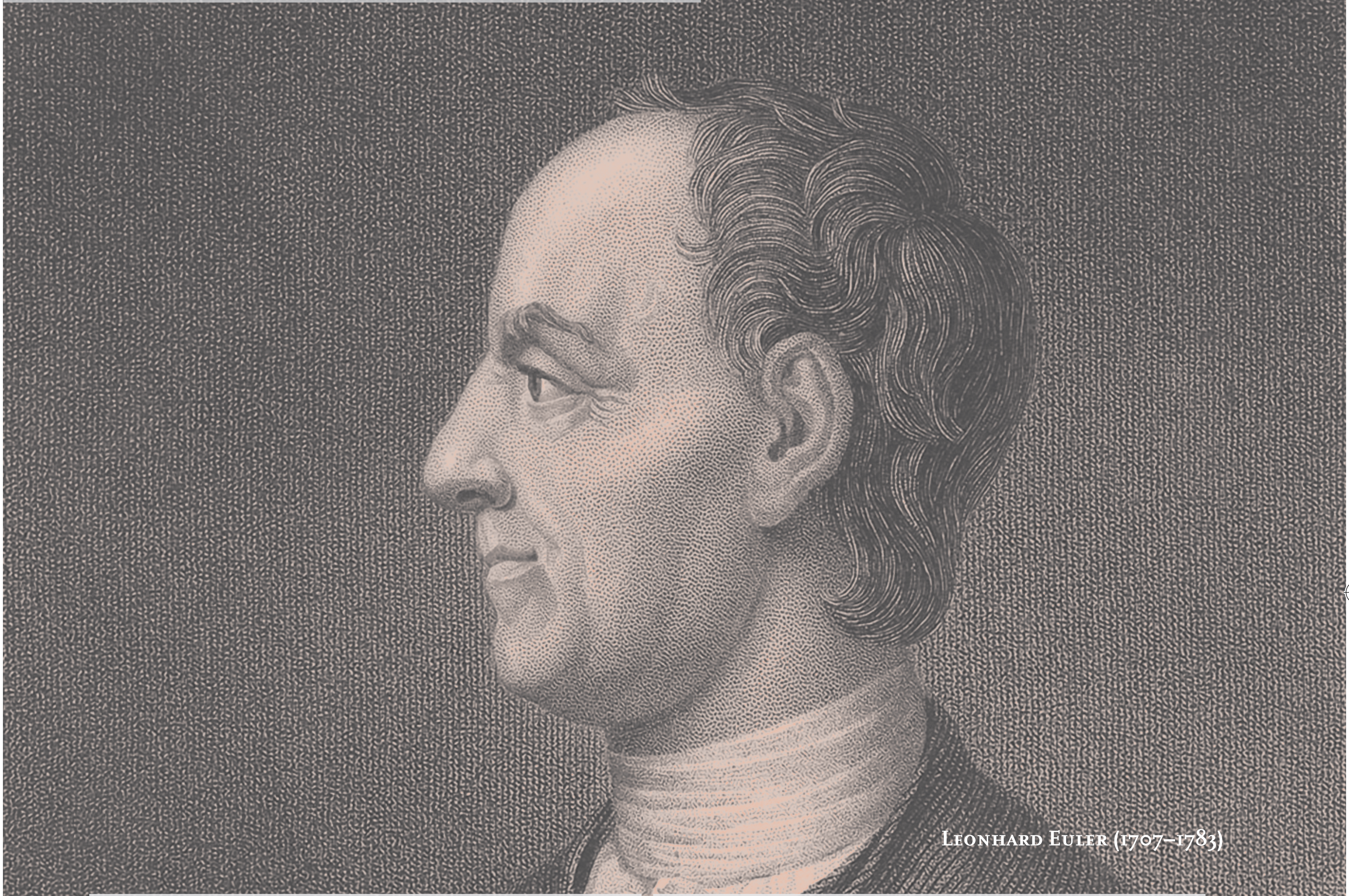
A notável identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$

José Luiz Pastore Mello
Carlos Eduardo de Souza Campos Granja



Leonhard Euler (1707–1783)

Introdução

Pergunte a um matemático qual é a fórmula mais bonita que ele conhece e provavelmente você ouvirá como resposta a «fórmula de Euler», ou seja, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Essa fórmula costuma ser muito lembrada não apenas pela sua importância no Cálculo Diferencial e Integral, mas também pelo encantador resultado que produz quando fazemos $\theta = \pi$. Nesse caso, como $\cos\pi = -1$ e $\mathrm{sen}\,\pi = 0$, segue que a fórmula implicará na identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma surpreendente reunião de cinco dos mais importantes números da matemática: π, e, i, 1 e 0. Se você preferir que nela apareça um número negativo, nada impede que seja escrita como $e^{i\pi} = -1$.

A demonstração completa da fórmula de Euler envolve o uso de ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral, porém, é possível explorar o resultado por ela apresentado por meio da matemática escolar do final do ensino médio[1]. Aos leitores interessados nessa abordagem recomendamos o artigo [1] do Prof. José Paulo Carneiro, indicado na bibliografia.

De nossa parte, resolvemos encampar o desafio de explorar a beleza da identidade $e^{i\pi} + 1 = 0$ utilizando recursos da matemática escolar. Nesse caso, a abordagem demandará conhecimentos elementares a respeito das fórmulas de multiplicação e potenciação de números complexos, bem

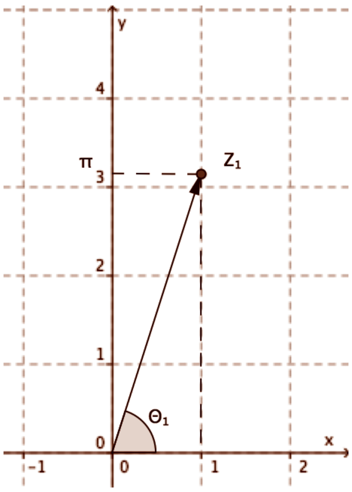


Figura 1

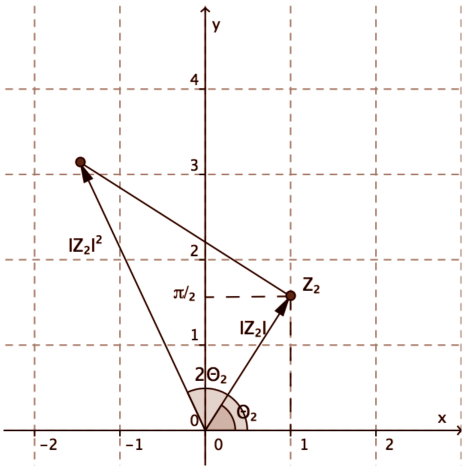


Figura 2

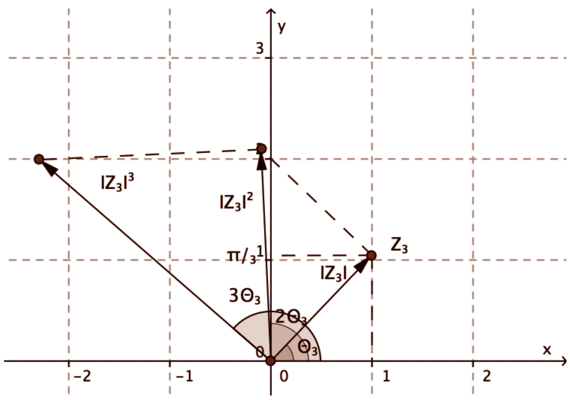


Figura 3

como da representação geométrica dessas operações no plano Argand-Gauss. A respeito deste segundo tema, o da representação geométrica dos complexos, também sugerimos uma indicação bibliográfica no final do artigo [2].

Visualização geométrica de $e^{i\pi}=-1$

O número e, que aparece na identidade de Euler quando $\theta = \pi$, é o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando n tende para o infinito. Com manipulações simples de limites, que podem ser encontradas em livros de Cálculo [3], é possível deduzir que e^x é o limite de $(1+\frac{x}{n})^n$ quando n tende para o infinito. Outro resultado que também se demonstra em matemática superior, e que aqui apenas assumiremos como válido, é o de que a definição de e^x como limite também é válida quando x é um número complexo [4].

Se x é o número complexo $i\pi$, então, para valores cada vez maiores de n a expressão $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ tende a $e^{i\pi}$. Usando esse resultado, e tomando a identidade de Euler $e^{i\pi} = -1$, concluímos que para valores cada vez maiores de n, a expressão $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ se aproxima cada vez mais, e tanto quanto se queira, de -1. A seguir ilustraremos esse resultado geometricamente.

O que acabamos de indicar aponta para o fato de que os termos da sequência $(1+i\pi)$, $\left(1+\frac{i\pi}{2}\right)^2$, $\left(1+\frac{i\pi}{3}\right)^3$, $\left(1+\frac{i\pi}{4}\right)^4$, ... são cada vez mais próximos do inteiro -1. Sendo $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ o n-ésimo termo dessa sequência, investigaremos geometricamente a representação de $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^1$, $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^3$, ..., $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ no plano Argand-Gauss.

Recordemos que a forma trigonométrica (ou polar) do complexo $z = a + bi$ é $|z|(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$, e da potência z^n é $|z|^n(\cos\theta n + i\,\mathrm{sen}\,\theta n)$; esta segunda usualmente chamada de 1.ª fórmula de Moivre. Do ponto de vista geométrico, a representação dos complexos $z, z^2, z^3, \ldots$ nada mais é do que uma sequência de vetores no plano Argand-Gauss de origem no par ordenado $(0,0)$, módulos respetivamente iguais a $|z|, |z|^2, |z|^3, \ldots$, e argumentos respetivamente iguais a $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$.

Voltando à sequência cujos termos estávamos interessados em representar geometricamente, para $n = 1$, chamaremos $1 + i\pi$ de z_1 e sua representação encontra-se na figura 1.

Para $n = 2$, chamaremos $1+\frac{i\pi}{2}$ de z_2 e representaremos, no mesmo plano Argand-Gauss, os complexos $1+\frac{i\pi}{2}$ e $\left(1+\frac{i\pi}{2}\right)^2$ (figura 2).

Para $n = 3$, chamaremos $1+\frac{i\pi}{3}$ de z_3 e representaremos os complexos $1+\frac{i\pi}{3}$, $\left(1+\frac{i\pi}{3}\right)^2$ e $\left(1+\frac{i\pi}{3}\right)^3$ (figura 3).

Estendendo essa investigação para um valor muito grande de n teremos $|z|$ muito próximo de 1, e os n vetores no plano irão «percorrer um semicírculo» com par ordenado mais à esquerda tendendo para $(-1,0)$, conforme ilustramos a seguir para o caso de $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ e $n = 25$ (figura 4).

Portanto, $e^{i\pi} = -1$ equivale a dizer que para valores muito grandes de n, a representação dos complexos $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^1$, $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^2$, $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^3$, ..., $\left(1+\frac{i\pi}{n}\right)^n$ no plano Argand-Gauss se aproxima de um semicírculo de centro $(0,0)$ e raio 1, com o par ordenado mais à esquerda da representação tendendo para $(-1,0)$. Do ponto de vista geométrico, é notável o surgimento de um semicírculo. Não é a toa que o número π está presente na identidade de Euler!

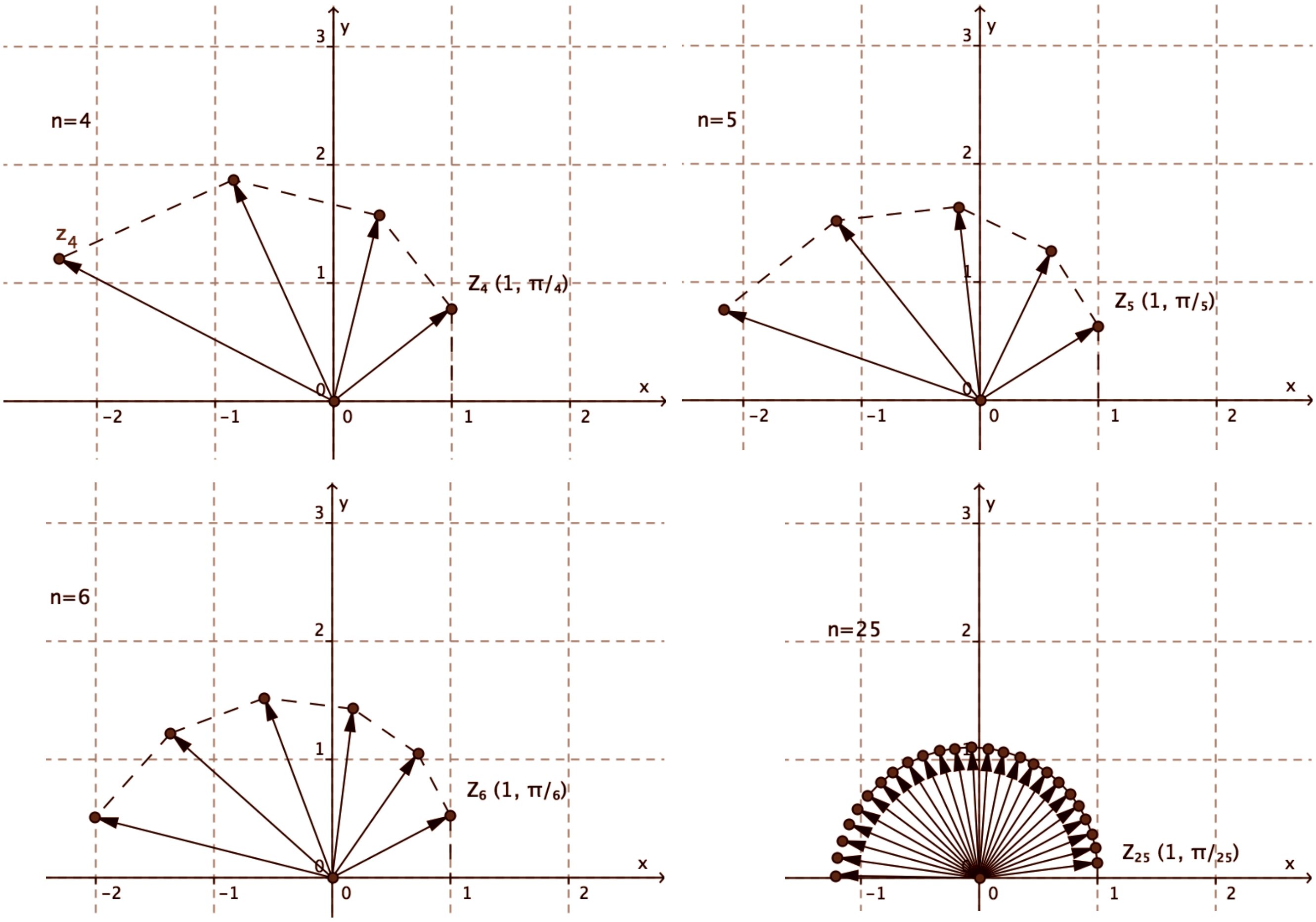


Figura 4

As ideias aqui apresentadas podem ser discutidas e exploradas com nossos alunos de forma dinâmica por meio do *software* Geogebra, o que torna a aula mais rica de significados e possibilidades. Fica nossa sugestão.

Nota

[1] No Brasil, Ensino Médio corresponde aos três anos que antecedem ao término da escolarização básica, normalmente dos 15 aos 17 anos de idade.

Bibliografia

[1] Carneiro, J. P. *Por que* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$*?* Revista do Professor de Matemática (n.° 77). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[2] Carneiro, J. P. *A geometria e o ensino dos números complexos.* Revista do Professor de Matemática (n.° 55). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

[3] Simmons, G. S. *Cálculo com geometria analítica, volume 1.* São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

[4] Höning, C. S. *Introdução às funções de uma variável complexa.* São Paulo: IME-USP, 1971.

[5] Providência, N. B. *Matemática ou mesas, cadeiras e canecas de cerveja.* Lisboa: Coleção O Prazer da Matemática, Gradiva, 2000.

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz, em São Paulo, Brasil

Carlos Eduardo de Souza Campos Granja
Colégio Santa Cruz, em São Paulo, Brasil