Para uma compreensão dos números inversos à luz do significado de medida de fração

Graciosa Veloso

Este artigo resultou de parte do trabalho desenvolvido, no ano letivo de 2013–14, com as duas turmas de Mestrado em Ensino do 1.º e do 2.º ciclos em Elementos de Álgebra e Análise, unidade curricular da componente Formação para a Área de Docência do plano de estudos do curso.

Proponho uma compreensão da relação existente entre números[1] inversos através da exploração do significado de medida de uma fração. Inicio o percurso com a medição da grandeza geométrica área, com unidades não convencionais, utilizando o Tangram, destacando a relação em estudo nos pares de peças adequados; prossigo para a grandeza comprimento, num contexto mais formal, o da representação de pontos num eixo orientado; finalmente, estabeleço uma conexão com o estudo funcional, explorando a relação de proporcionalidade inversa.

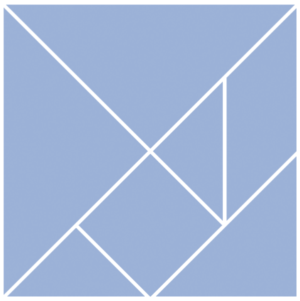
Pretendo, deste modo, destacar a importância formativa do entendimento concetual associado ao conhecimento procedimental na linha do que é proposto por Ma (2009). Espero também, de acordo com a literatura referente à formação inicial e ao desenvolvimento profissional, contribuir para ilustrar a especificidade do conhecimento necessário para ensinar Matemática (Albuquerque *et al.*, 2008; Ma, 2009; Ponte & Chapman, 2008; Veloso, 2015).

Fração como medida de uma grandeza

Nesta secção vou discutir situações em que surgem, entre outros, números inversos como a medida de grandezas geométricas e inicio-a com a caracterização do significado de medida de uma fração. A fração $\frac{a}{b}$, em que as variáveis a e b representam números inteiros não negativos e $b \neq 0$, entende-se como representando a medida da quantidade a de uma grandeza no numerador, tendo como unidade o valor b (da mesma grandeza) do denominador. No contexto de medida trabalha-se sempre com números não negativos e como o denominador representa o número de partes iguais em que a unidade está decomposta, fica esclarecida a restrição $b \neq 0$, uma vez que este termo da fração tem de ser positivo.

Matematicamente, a medição de uma grandeza, tal como Caraça (2002) o caracteriza, inclui três passos distintos e interligados:

- a escolha de uma unidade
- a comparação da quantidade de grandeza com a unidade
- a expressão, através de um número, do resultado desta comparação.



O *Tangram* é um *puzzle* chinês constituído por 7 peças:

2 triângulos grandes
2 triângulos pequenos
1 triângulo médio
1 quadrado
1 paralelogramo obliquângulo

Figura 1.—Tangram

Com apoio em material manipulável, passo a ilustrar este processo e a enquadrar o surgimento de números inversos na variação da medida de uma grandeza em função da variação da unidade considerada.

Considere-se a tarefa

Medir a área das cinco peças diferentes do *Tangram*, considerando como unidade, sucessivamente a:

- área do triângulo pequeno
- área do triângulo médio
- área do triângulo grande
- área do quadrado
- área do paralelogramo obliquângulo
- área do quadrado grande (correspondente à composição das 7 peças conforme a figura 1)

Por manipulação ou/e visualização estabelecem-se as relações que permitem obter as medidas da área registadas na tabela 1.

Em cada célula da tabela está registada a medida da área da peça identificada no cimo da coluna considerando como unidade a área da peça identificada no início da linha. O significado de medida de uma fração permite, por exemplo, encarar a fração 1/16, da primeira coluna da tabela 1, como exprimindo a medida da área do triângulo pequeno considerando como unidade a área do quadrado grande. O denominador — 16 — representa o número de partes iguais (triângulos pequenos) em que a unidade (quadrado grande) está dividida — e o numerador — 1 — indica quantas dessas 16 partes estão a ser medidas. Com este mesmo critério podem ser interpretados todos outros numerais desta tabela.

A tabela como meio organizado de registo de dados facilita a observação e comunicação de propriedades e outras relações importantes como passo a exemplificar:

- Em cada linha está registada a medida das (áreas das) diversas peças considerando como unidade a área da figura identificada no início da linha.
- Em cada coluna está registada a medida da área da peça identificada no seu início, considerando as seis unidades de medida.
- A medida da área é 1 quando a unidade é, ou a própria figura, ou uma figura equivalente àquela que está a ser medida.
- A medida é um número maior ou igual à unidade sempre que a unidade é menor ou igual à área a medir respetivamente; a medida é um número fracio-

	Medida da área da peça				
Unidade (área da peça)	Triângulo pequeno	Triângulo médio	Triângulo grande	Quadrado	Paralelogramo obliquângulo
Triângulo pequeno	1	2	4	2	2
Triângulo médio	1/2	1	2	1	1
Triângulo grande	1/4	1/2	1	1/2	1/2
Quadrado	1/2	1	2	1	1
Paralelogramo obliquângulo	1/2	1	2	1	1
Quadrado grande	1/16	1/8	1/4	1/8	1/8

Tabela 1.—Medida da área das peças do Tangram com diferentes unidades

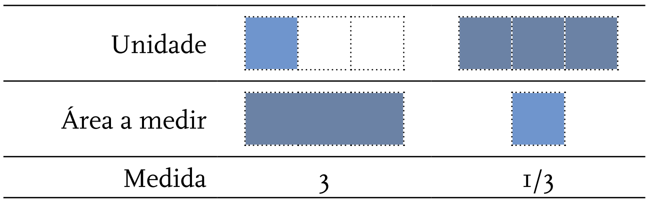


Figura 2.—Significado de medida para os números inversos 3 e 1/3

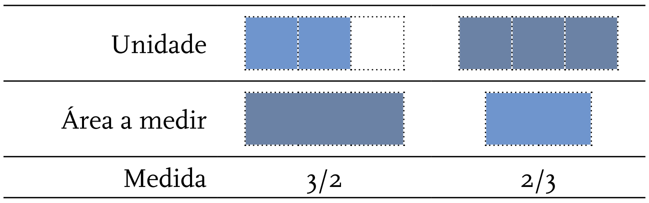


Figura 3.—Significado de medida para os números inversos 3/2 e 2/3

nário menor que 1 sempre que a unidade é maior que a área em medição.

- Há figuras não congruentes que são equivalentes (têm áreas iguais): paralelogramo obliquângulo, quadrado e triângulo médio.
- A grandeza (área) é invariante e a respetiva medida é variável.
- A medida da área varia com a variação da unidade.
- Existem dois pares de números inversos (2, 1/2) e (4, 1/4).

Considere-se o par de números inversos (2, 1/2). Como se pode ver na tabela 2, o numeral 2 representa a medida da área do triângulo médio quando a unidade considerada é a área do triângulo pequeno; reciprocamente, quando se considera como unidade a área do triângulo médio, 1/2 representa a medida da área do triângulo pequeno.

Em síntese, à troca de papéis entre as duas quantidades da grandeza área corresponderam os números inversos 2 e 1/2. Pode afirmar-se que:

- o inverso de 2 é 1/2.
- o inverso de 1/2 é 2 e representar-se esta relação por 1/(1/2)

Generalizando, em contextos de medida, pode afirmar-se que dadas duas quantidades da mesma grandeza e se mede cada uma delas considerando a outra como unidade, obtêm-se números inversos, representáveis por i e $1/i$, com a variável i positiva.

Unidade	Medida da área da peça	
	Triângulo pequeno	Triângulo médio
Triângulo pequeno	1	2
Triângulo médio	1/2	1

Tabela 2.—Números inversos como medida de área

Números inversos como medida e unidade da mesma grandeza

Nesta secção, estendo as observações feitas anteriormente a outros exemplos de números inversos, concluindo com a generalização a quaisquer elementos do conjunto Q^+ — os números racionais positivos.

A tabela 1 apresenta dois pares de números inversos. Em cada par aparece uma fração unitária (numerador 1). Relativamente ao par (2, 1/2) pode observar-se o seguinte: 2 é a medida do triângulo médio, do quadrado ou do paralelogramo obliquângulo quando a unidade é a área do triângulo pequeno; ao inverter os papéis entre a unidade e a quantidade a ser medida, 1/2 representa a medida da área do triângulo pequeno quando qualquer uma das três figuras (equivalentes) é considerada unidade. Idêntica observação pode ser feita relativamente ao outro par (4, 1/4) de números inversos.

À luz do significado de medida de uma fração pode dar-se sentido à relação existente entre outros pares de números inversos, como passo a propor na figura 2 e na figura 3.

Como mostra a figura 2, quando a unidade é a área da peça de cima, esta cabe 3 vezes na área a medir, e portanto 3 é a medida desta; reciprocamente, quando a unidade é a área da peça que acabou de ser medida, é possível ver que a área a medir é 1 dos 3 pedaços iguais, afirmando assim que a fração 1/3 representa a medida da área menor.

Identicamente, pode ser analisado o exemplo dos números inversos representados por 3/2 e 2/3, com recurso, por exemplo a material Cuisenaire. Considerem-se as barras de cor vermelha e verde-claro equivalentes a 2 e a 3 barras brancas respetivamente. Qual é a medida da área da barra verde-claro, tomando como unidade a área da barra vermelha ou, de modo equivalente, quantas vezes cabe a unidade (barra vermelha) na barra verde-claro? A figura 3 ajuda a concluir que cabe uma vez e meia, ou seja, que a área da barra verde é 3/2 da área da unidade.

Passando à situação inversa, isto é, considerando como unidade a área da barra verde-claro e determinando a medida da área da barra encarnada, pode perguntar-se «quantas vezes cabe a unidade na área a medir?». A medida tem de ser menor que 1, pois a área tomada para unidade é maior que a área da barra vermelha; como se vê na figura 3, existe uma área (a da barra branca) que cabe um número inteiro de vezes tanto na unidade como na área a medir; a área unidade está decomposta em 3 partes iguais e a área a medir em 2 (das 3). A medida é assim 2/3. Em síntese, 2/3 e 3/2 traduzem a medida da área das duas barras, significando que cada um dos numerais representa a medida de uma das duas áreas quando a outra é considerada como unidade; 2/3 e 3/2 denominam-se números inversos, ou 2/3 é o inverso de 3/2 e reciprocamente. A fração 1/(2/3) representa a medida da unidade quando se usou a área 2/3 como nova unidade. A fração 1/(3/2) representa a medida da unidade quando se usou a área 3/2 como nova unidade. A expressão $3/2 \times 2/3 = 1$ traduz formalmente a relação entre os números inversos envolvidos.

Soltemo-nos agora da utilização do material manipulável, aproveitando a reflexão feita sobre a sua utilização em função do objetivo matemático em vista, para prosseguir no caminho da abstração e sua representação formal. Utilizando eixos orientados vamos representar o que foi discutido com o material.

Consideremos que, na figura 4, o segmento de reta *AB* representa a barra vermelha e que o segmento de reta *CD* representa a barra verde-claro.

Qual será a medida de $\overline{CD}$, considerando a unidade $\overline{AB}$?

O comprimento da barra branca mede simultaneamente os comprimentos de *AB* e de *CD*, podendo escrever-se que a unidade está dividida em 2 partes iguais e a barra a medir em três partes iguais, podendo ser afirmado o seguinte: «A unidade $\overline{AB}$ cabe 1 vez e meia em $\overline{CD}$ e portanto a medida é 3/2».

Identicamente se pode afirmar que: «A unidade $\overline{CD}$ não chega a caber uma vez em $\overline{AB}$, sendo a medida deste comprimento 2/3». A inversão de papéis entre os dois comprimentos é acompanhada da inversão do numerador com o denominador de uma das frações 3/2 ou 2/3.

Sistematizando, a exploração acabada de fazer procura responder compreensivamente à seguinte pergunta: O que é o inverso de um número não nulo? Na figura 4. estão representados dois eixos orientados em que tanto *A* como *C* correspondem a zero. Por um lado, quando se afirma que *B* corresponde a 2/3 toma-se por certo que *D* corresponde à unidade. Por outro lado, para se afirmar que D corresponde a 3/2 é preciso considerar que *B* corresponde à unidade, ou, de modo equivalente, $\overline{AB}$ é o inverso de $\overline{CD}$ quando $\overline{AB}$ é medido tomando $\overline{CD}$ por unidade. E $\overline{CD}$ é o inverso de $\overline{AB}$ quando $\overline{CD}$ é medido tomando $\overline{AB}$ por unidade.

A resposta, para qualquer número não nulo, pode assim ser formulada. O inverso de um número não nulo é o número de vezes que esse número cabe na unidade em que foi medido. Usando a variável *r*, não nula, definida no conjunto dos números racionais positivos, o inverso de *r* — $1/r$ — é o número de vezes que *r* cabe na unidade, ou seja, $1/r$, é a medida da unidade quando *r* é considerada unidade. A identidade $1 = r \times 1/r$, com $r \neq 0$ traduz formalmente a relação entre números inversos.

Números inversos e proporcionalidade inversa

A secção anterior centrou a atenção na atribuição de significado à relação existente entre dois números inversos através da medida das grandezas área e comprimento. Houve, porém, outras relações identificadas que importa explorar. É possível agora passar à conexão com a proporcionalidade inversa, uma vez que acabou de ser explicitada a invariância existente na infinidade de pares de números inversos: produto unitário. Vem assim a propósito caracterizar a função que transforma cada número positivo no seu inverso. Considerem-se todos os pares de números inversos que apareceram neste artigo: (1, 1) (2, 1/2); (4, 1/4); (16, 1/16); (8, 1/8); (2/3, 3/2) e os pares inversos (1/2, 2), etc. Existe um invariante: o produto unitário de quaisquer dois números inversos. Esta invariância é traduzida pela expressão com uma variável positiva $1 = r \times 1/r$. Como pode ser confirmado pela análise da tabela 3, quando a variável r varia multiplicativamente com um fator $k \neq 0$, a variável $1/r$ correspondente varia também multiplicativamente com o fator $1/k$; por exemplo, considerando os pares ordenados (1/4, 4) e (1/2, 2) é claro que 1/2 é o dobro de 1/4; os valores correspondentes, 4 e 2 verificam a relação inversa, ou seja, 2 é metade de 4. Todas estas relações são traduzidas graficamente na figura 5 através do ramo da hipérbole definida pela equação $y = 1/r$, com *r* pertencente ao conjunto dos números racionais positivos.

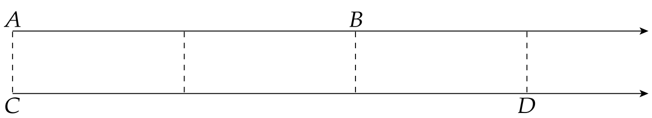


Figura 4.— $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ representam o comprimento da barra vermelha e da barra verde-claro respetivamente

$r > 0$	1/4	1/2	3/2	4	8	16
$1/r$	4	2	2/3	1/4	1/8	1/16
Produto	1	1	1	1	1	1

Tabela 3.— Números inversos positivos

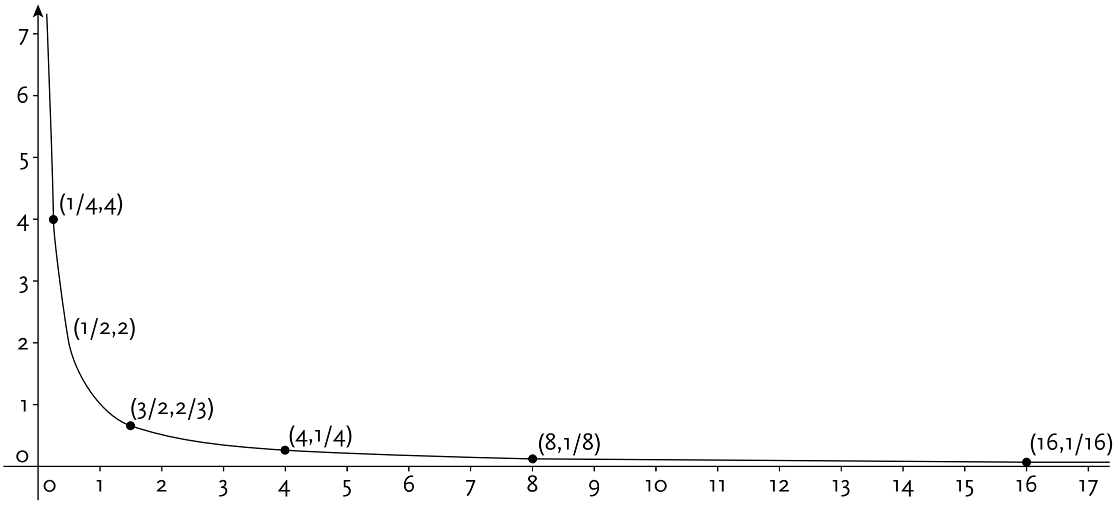


Figura 5.—Gráfico cartesiano da restrição a Q^+ da função definida por $y = 1/r$.

Considerações finais

O conhecimento necessário ao ensino da Matemática nos primeiros anos requer uma complexa e contínua articulação entre a componente do conhecimento da e sobre a Matemática, do conhecimento didático e do conhecimento curricular, tanto na formação inicial como na formação contínua de professores. Este artigo, tal como escrevi no seu início, é centrado no desenvolvimento da compreensão e fundamentação da relação existente entre números inversos. Se for considerado um contributo para o desenvolvimento da compreensão que sustenta o ensino da Matemática no Ensino Básico, cumpriu o objetivo que me propus ao tê-lo colocado para discussão matemática e didática.

Nota

[1] O conjunto dos números racionais não negativos, Q_0^+ é o universo numérico de referência deste artigo. As relações estabelecidas neste universo são extensíveis ao conjunto dos números reais não negativos.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2008). *A Matemática na Formação Inicial de Professores*. Lisboa: APM e SPCE.

Caraça, B. J. (2002). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (4ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Ma. L. (2009). *Saber e Ensinar Matemática Elementar*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225–263). New York, NY: Routledge.

Veloso, G. (2015). *Conhecimento Matemático para ensinar Números Racionais no 1.° e no 2.° Ciclo de Ensino Básico: contributos para a formação inicial de professores* (Trabalho apresentado para obtenção de título de especialista). Instituto Politécnico de Lisboa, Lisboa.

Graciosa Veloso
Escola Superior de Educação de Lisboa