A discussão coletiva na resolução de problemas envolvendo números inteiros

Joana Galrinho, Neusa Branco

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas é aqui considerada como uma atividade privilegiada para os alunos consolidarem, ampliarem e aprofundarem o seu conhecimento matemático. Para isso torna-se necessário que estes compreendam que um problema matemático pode ser resolvido através de diferentes estratégias e que foquem a sua atenção na análise da sua resolução e apreciação dos resultados que obtêm (ME, 2007).

É privilegiada a abordagem de ensino exploratório da Matemática (Ponte, 2005), sendo contemplados os momentos de introdução da tarefa, da sua realização e da sua discussão com sistematização das ideias matemáticas. Nesta abordagem a escolha da tarefa é essencial de modo a possibilitar que «os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem de ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva» (Canavarro, 2011, p. 11). O momento de partilha e discussão de resoluções é também muito importante, sendo profícuo para a aprendizagem de novas estratégias e de novos conhecimentos matemáticos. O professor deve assumir um papel ativo neste momento, ajudando os alunos a justificar as suas ideias matemáticas, a analisar criticamente diversas estratégias e a confrontá-las com a sua, tendo possibilidade de aprender modos de resolução diferentes dos seus que podem utilizar em situações futuras (NCTM, 2007). A condução deste momento é essencial para a promoção das aprendizagens pelo que o professor deve considerar as cinco práticas para orquestração das discussões matemáticas referidas por Stein, Engle, Smith & Hughes (2008): antecipação, monitorização, seleção, ordenação e estabelecimento de conexões.

A situação de ensino-aprendizagem que apresentamos acontece numa turma de 6.° ano, em Matemática, no 3.° período e decorre de um estudo que visa identificar o contributo da resolução de problemas para a aprendizagem matemática dos alunos, no âmbito de uma abordagem de ensino exploratório. Aqui centramo-nos no momento de discussão da tarefa «O ascensorista», que visa iniciar o trabalho com operações com números inteiros:

O senhor Alberto é ascensorista num hotel e começou o seu dia de trabalho no piso –1. Os primeiros hóspedes pediram-lhe para os levar para três pisos acima. Neste piso, entraram mais hóspedes que subiram outros três pisos. Aqui, apanhou um casal de namorados que desceu oito pisos. No final do dia, para se desfardar, o senhor Alberto teve que subir quatro pisos e, por último para ir para casa teve que descer dois pisos. No final do dia o senhor Alberto estava no mesmo piso onde começou o dia pela manhã?

A DISCUSSÃO COLETIVA

Após a apresentação da tarefa pela professora os alunos resolvem-na a pares. Durante esse trabalho autónomo dos alunos a professora monitoriza as suas resoluções, o que permite identificar estratégias e representações diferentes na turma. Decorrente essa monitorização, para a discussão seleciona quatro resoluções, tendo em conta a análise que os alunos fazem do problema, passo a passo ou global, e as representações que usam. Dessas são aqui apresentadas as três que mais se distinguem.

Em primeiro lugar apresentam a sua resolução os alunos A e B que fazem uma análise passo a passo (figura 1) e usam um esquema. Este par não explicita as operações, pois apoia-se no esquema para obter os resultados inter-

Sim, o Senhor Alberto quando começou o seu trabalho estava no piso –1. Depois os hóspedes subiram 3 pisos. Foram parar ao piso 2. De seguida os hóspedes subiram os 3 pisos que foi parar no piso 5, depois um casal de namorados desceu 8 pisos que foi parar no piso –2. Para desfardar-se o Alberto teve de subir 2 pisos que foi dar ao piso 1. Por fim, desceu dois pisos que foi parar ao piso –1. Portanto o Senhor Alberto para no mesmo piso onde começa.

Figura 1.— Descrição realizada pelos alunos A e B.

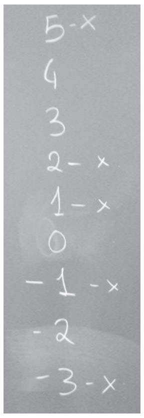

Figura 2.— Registo no quadro dos alunos A e B.

médios dos pisos, tal como a maioria dos pares da turma. Na sua resposta fazem ainda uma descrição dos movimentos realizados pelo elevador e dos pisos em que esteve o ascensorista ao longo do dia. No seu esquema, tal como registam no quadro (figura 2), apresentam os pisos ordenados na vertical e têm assinalados os pisos em que o ascensorista fica após cada movimento.

Durante a sua apresentação existem momentos de interação entre a professora e os alunos e entre os alunos. Essa discussão possibilita a clarificação de resultados intermédios obtidos, nomeadamente do resultado obtido quando a partir do piso 5 desce 8 pisos. Os alunos realizam a contagem da descida de oito pisos no seu esquema e a professora salienta que esse valor representa a distância entre os dois valores, 5 e –3.

Aluno A: Depois subiu três pisos e parou no 2. Depois subiu outros 3 pisos e foi para o 5 e depois desceu 8 pisos e foi para o –3.

Professora: Desceu 8 pisos desde onde?

Aluno A: Do 5.

Professora: O que é que isso quer dizer? Disseste que ele estava no piso 5, desceu 8 e foi parar ao –3. O que é que representa aquele 8?

Aluno X: Os pisos que ele desceu.

Aluno Z: O mais alto e o mais baixo que ele foi.

Aluno Y: Extremos.

Professora: Também, mas não é só isso. Ele estava no quinto piso e desceu quantos?

Turma: 8.

Professora: E ficou no...?

Turma: –3?

Professora: Então quantos pisos são desde o 5 ao –3?

Turma: 8.

Professora: Qual é a distância do 5 ao –3?

Turma: 8.

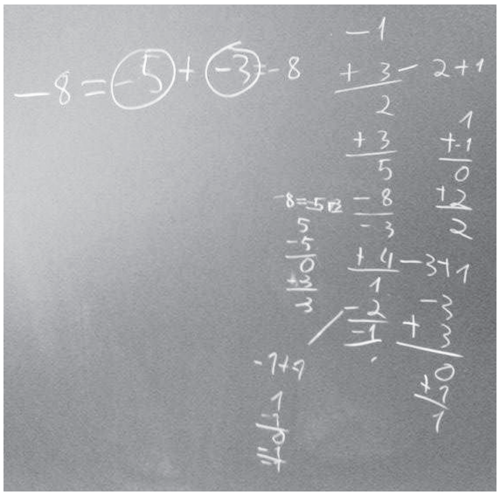

Figura 3.— Registo no quadro dos alunos E e F.

Posteriormente, é discutida a resolução dos alunos E e F que fazem igualmente uma análise do problema passo a passo mas utilizam uma representação simbólica (figura 3). É uma estratégia complexa e promove a introdução das operações com números inteiros como é objetivo da tarefa, pelo que este momento da discussão é mais longo.

O par apresenta o modo como procedeu e a sua resolução permite uma primeira abordagem às operações com números inteiros. A professora intervém para que expliquem de modo detalhado como obtiveram os resultados e para garantir que a turma acompanha e é crítica perante esta resolução. Assim, a discussão centra-se no modo como resolvem as operações, sem que qualquer indicação lhes tenha sido dada sobre como proceder. Os alunos já sabem o que são números simétricos e usam esse conhecimento para realizar as operações:

Aluno E: Eu comecei no piso –1 e depois como subiu é igual à soma. Adicionei o piso inicial e o que ele subiu, deu 2.

Professora: Todos concordam?

Turma: Sim.

Professora: Então –1 + 3 dá 2? Como é que fizeste isso?

Aluno E: Porque somando, o três fica 2 + 1. [–1 + 1 + 2] Somei aqui 1 deu 0 e depois mais os 2.

Professora: Escreve aí ao lado. O 3 é igual a quê? Decomponham o 3.

Turma: 2 + 1.

Professora: Explica lá.

Aluno E: O 1 + (–1) dá o 0 e depois mais 2 fica 2.

Os alunos centram-se agora na realização da adição algébrica que tem como parcelas um número positivo e um número negativo. Decompõem o número de maior valor absoluto de modo a obter nessa decomposição um valor simétrico ao valor da outra parcela. Assim, decompõem a parcela 3 como 2+1, sendo o (+1) o simétrico da parcela (–1) e referem que a soma dos simétricos é zero pelo que o resultado da adição inicial é 2. Os restantes alunos da turma, que não usam a adição algébrica, acompanham o processo de cálculo apresentado por este par.

De seguida, explicam como realizam uma nova operação, 5–8. Uma vez mais recorrem à decomposição da parcela de maior valor absoluto. O aluno E esclarece que decompõem o número –8, modelando novamente a situação por meio de uma adição algébrica, de modo a obter um número simétrico de 5, 5+(–8)=5+(–5)+(–3), para daí resultar uma soma igual a zero.

Aluno E: [Estava no piso 2] E depois subiu mais 3 pisos que é outra vez igual à soma e foi parar ao piso 5. Como depois desceu 8 pisos, decompus também o 8.

Professora: Tu dizes que 5–8 é .–3 5–8 é –3?

Alguns alunos: Sim, é.

Professora: Porquê?

Aluno Z: Se tirarmos primeiro 5 fica no 0 e depois se tirarmos mais 3 fica no –3.

Professora: Mas ele não fez assim. Tu decompuseste o 8 ou o –8?

Aluno E: O –8 deu –5+(–3). O 5 menos o 5 deu 0.

Professora: Porquê?

Aluno E: Anulam-se.

Em seguida, o aluno E escreve 0+3=3. Com base neste erro a professora solicita-lhe que explique novamente como realiza a operação, retomando a decomposição de (–8) onde revela dificuldades na representação simbólica. Para esclarecer a diferença entre fazer a adição de dois números negativos e a subtração de dois números negativos, a professora dá exemplos de duas situações contextualizadas para promover a compreensão dos alunos. Essa discussão envolve toda a *Turma:*

Aluno E: O –8 é igual a –5–(–3) por isso 5–5 dá o 0 e o 0 menos o –3 dá –3.

Professora: Todos concordam que –8 é –5–(–3)? Escreve lá isso. Ele diz que ter –8 é o mesmo que ter –5–(–3). Quanto é –5–(–3)?

Aluno A: É –2.

Professora: Então como é?

Aluno A: É –5+(–3).

Professora: Percebeste? Tu disseste que –8 é –5–(–3). O que significa o –?

Turma: É uma subtração.

Professora: É uma diferença [a professora escreve no quadro]. Eu devo 5 euros e a professora Ana só deve 3 euros. O que é que isto representa?

Turma: Uma diferença.

Professora: Então qual é a diferença entre o que eu devo e o que a professora A deve?

Turma: 2.

Professora: 2 ou –2?

Turma: É –2.

Professora: E agora, vocês dizem que –8 é –5+(–3), ou seja, no talho eu devo 5 euros e na mercearia eu devo 3. Quanto é que eu devo ao todo?

Turma: Devo 8.

Professora: Se eu devo…

Turma: É –8.

Professora: Vamos continuar, ele decompôs o –8 em –5+(–3).

Após esta discussão o aluno E corrige no quadro a indicação da operação, 0–3=–3 e continua a explicar as restantes operações. Decompõe, em seguida, o 4 para resolver a operação –3+4.

Aluno E: Depois, dava –3. Por isso, depois como ele subiu mais 4 pisos foi parar ao 1. Porque decompus outra vez, 3+1.

Professora: Anulaste o três sobrou-te…

Aluno E: O 1.

Professora: E –3–3 é igual a 0 [referindo-se ao registo no quadro]. Todos concordam?

Turma: Sim.

Perante esse erro (–3–3=0), a professora dá novo exemplo: «Eu devo 3 euros no talho e devo 3 euros na mercearia. Quanto é que eu devo?». Deste modo os alunos conseguem indicar o resultado correto dessa operação. Depois deste momento, o aluno E corrige o erro e continua a explicação da resolução das operações através da decomposição dos números com maior valor absoluto e conclui que no final obtém –1, valor que corresponde ao piso em que o ascensorista fica no final do dia, ou seja, o mesmo piso em que começa o dia.

Nesta sua resolução, o par apresenta à turma um modo de realizar adições com números inteiros em que as duas parcelas têm sinais contrários (por exemplo –1+3; 5+(–8); –3+2). A sua estratégia envolve a decomposição dos números de maior valor absoluto de modo a obter uma adição com números simétricos.

Por fim, apresentam a sua resolução os alunos G e H, que também recorrem à representação simbólica mas com uma abordagem global (figura 4).

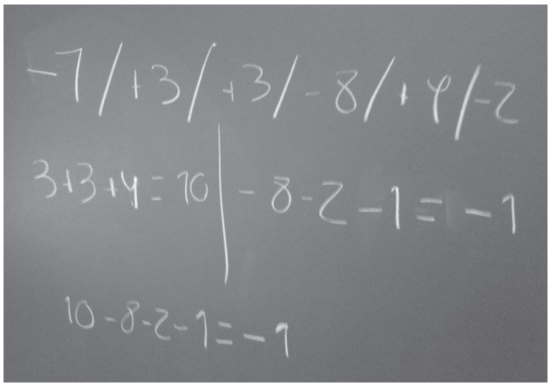

Figura 4.— Registo no quadro dos alunos G e H.

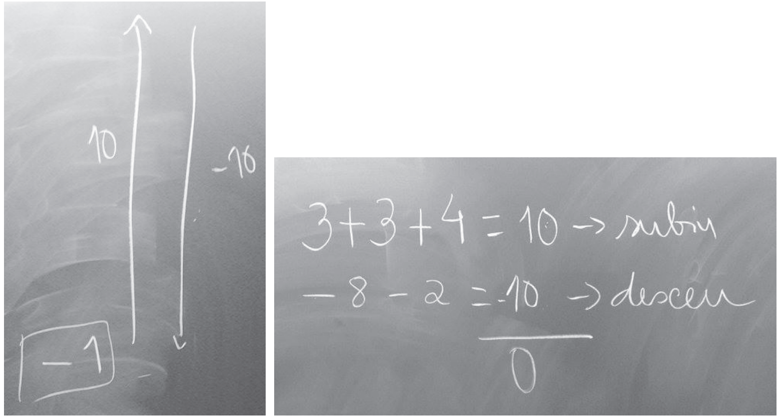

Figura 5.— Representações no quadro da análise global.

Este par representa por números positivos as subidas de pisos e por números negativos as descidas de pisos, incluindo a posição em que o ascensorista se encontra inicialmente (–1). Depois disso adicionam todos os números inteiros positivos e ao resultado adicionam todos os negativos. Contudo, fazem a representação de todas as operações erradamente numa única expressão ($3+3+4=10-8-2-1=-1$). A professora alerta a turma para essa situação e o aluno G escreve uma nova expressão, $10-8-2-1=-1$.

Com base nesta análise global do problema a professora discute com a turma um outro modo de representar o total de subidas e o total de descidas de modo a se concluir acerca do piso em que o ascensorista fica no final do dia:

Professora: Dúvidas? Quem fez de maneira diferente? O senhor Alberto subiu quantos pisos no total?
Turma: 10.
Professora: E quantos é que ele desceu no total?
Turma: 11.
Professora: Quantos? Leiam o enunciado.
Turma: Desceu 10.
Professora: Como?
Turma: Primeiro desceu 8 e depois desceu 2.
Professora: Então ele subiu 10 e desceu 10.
Turma: Anulam-se.
Professora: E vai ficar no mesmo piso.

A professora faz o registo no quadro desta análise do problema (figura 5) em que os alunos concluem mais uma vez que o ascensorista no final fica no piso em que tinha iniciado o seu dia, o piso –1.

Durante essa discussão a professora solicita explicações das resoluções, justificações dos resultados obtidos e das representações utilizadas e estabelece conexões com outros contextos que visam a promoção da compreensão dos números inteiros e das operações. Este é o momento da aula que a professora considera como matematicamente mais significativo, uma vez que a turma se encontra envolvida na discussão de ideias matemáticas que surgem das suas resoluções e que são analisadas por todos, evidenciando relações numéricas e propriedades das operações.

CONCLUSÃO

A abordagem de ensino exploratória permite que do trabalho autónomo dos alunos surjam diferentes representações e análises que são depois alvo de partilha e discussão. Nesta tarefa de introdução às operações com números inteiros os alunos realizam adições, utilizando esquemas e expressões numéricas. A discussão das várias resoluções permite aos alunos perceber que podem usar várias estratégias válidas para a resolução de um mesmo problema. A maioria dos alunos recorre a uma análise passo a passo do problema e usa um esquema. Outros utilizam uma análise passo a passo representada por expressões numéricas e um par usa uma análise global também com recurso a uma expressão numérica.

A discussão do processo que um par de alunos usa para o cálculo de adições com números inteiros contribui para a clarificação desse processo por parte desses alunos e também para a aprendizagem dos restantes colegas. Toda a turma é envolvida na análise crítica das expressões numéricas apresentadas e para os resultados das operações, tendo por base o seu conhecimento da decomposição dos números e da adição de números simétricos.

A abordagem de ensino exploratório potencia a discussão de ideias matemáticas no âmbito da resolução de problemas, possibilitando o surgimento de estratégias diversificadas durante o trabalho autónomo dos alunos, e a sua posterior partilha e discussão no momento de discussão coletiva, tendo aqui um papel central a seleção e ordenação das resoluções a discutir feita pela professora. A utilização de uma tarefa desta natureza tem o intuito de fazer emergir essa diversidade de resoluções, permitindo introduzir um novo tópico e explorar novas ideias com base nas ideias dos alunos.

Esta situação de ensino-aprendizagem evidencia a pertinência da resolução de problemas na introdução de conceitos e procedimentos, e do ensino exploratório para fazer emergir o conhecimento matemático na sala de aula a partir do trabalho dos alunos que é depois institucionalizado.

Referências

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11–17.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação — Direção-geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.

Stein, M, Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313–340.

Joana Galrinho
Instituto Politécnico de Santarém
Escola Superior de Educação

Neusa Branco
Instituto Politécnico de Santarém,
Escola Superior de Educação
Unidade de Investigação do Instituto de Educação
Universidade de Lisboa (UIDEF)

MATERIAIS PARA A AULA DE MATEMÁTICA

Um quadrado muito especial!

A tarefa aqui apresentada foi inspirada num texto publicado no livro de matemática recreativa «Mais Matemáticas Assassinas» de Poskitt Kjartan (2003). Esta tarefa foi pensada para alunos desde o 1.º ciclo ao ensino secundário com o objetivo de motivar os alunos e despertar a sua curiosidade para a explicação ou demonstração, consoante o nível de escolaridade dos alunos, da relação que conduz ao número obtido. Sugerimos a leitura do artigo «O grande Califa e os poderes mágicos da matemática» publicado neste número onde é feita a exploração para um quadrado 5×5. Para os alunos do ensino secundário o professor poderá começar logo com o quadrado 4×4 e para os alunos do 1.º ciclo poderá não passar do de 5×5, caberá ao professor perante as características dos seus alunos tomar esta decisão. Aconselha-se que esta tarefa seja realizada a pares ou em pequenos grupos e que haja uma discussão final sobre a razão da regularidade observada.

Sílvia Zuzarte
Agrupamento de Escolas de Casquilhos