Paralelogramo e triângulos

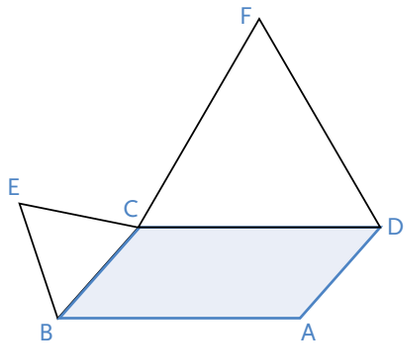
A partir do paralelogramo ABCD, construíram-se, para o seu exterior, os triângulos equiláteros BCE e CDF.

O Eduardo garante que as distâncias AE, AF e EF são iguais. Terá razão?

Nota: Se fosse o Eduardo Veloso a fazer a afirmação, não haveria dúvidas, era garantido. Mas a questão é que não sabemos quem é este Eduardo...

Prolongamento: E se os triângulos equiláteros forem construídos na direção do interior do paralelogramo??

(Respostas até 15 de outubro para zepaulo46@gmail.com)



UM CUBO E MUITOS TRIÂNGULOS

O problema proposto no número 131 de Educação e Matemática foi o seguinte:

> *Quantos triângulos retângulos se podem obter escolhendo três vértices de um cubo?*
> *Pergunta adicional: Se escolhermos ao acaso três vértices de um cubo, qual é a probabilidade de eles formarem um triângulo retângulo?*

Recebemos 10 respostas, enviadas por Alexandre Azevedo (Guimarães), Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva e Diogo Santos (Amadora), Mário Roque (Guimarães), Pedro Resende (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e de um grupo de quatro professores de Paião: Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

Os métodos de contagem de triângulos variaram.

O grupo de Paião e o Pedro Resende dividiram os possíveis triângulos retângulos em dois tipos.

Tipo 1 — Triângulos pertencentes a uma face do cubo

Em cada uma das faces do cubo, podem obter-se 4 triângulos, todos retângulos (como se ilustra na figura 1).

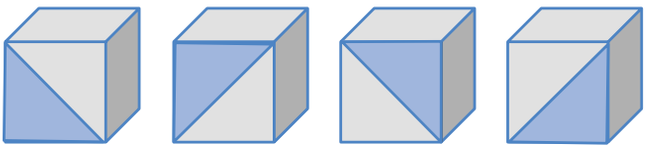


Figura 1

Logo, nas 6 faces do cubo podem obter-se 24 triângulos retângulos.

Tipo 2 — Triângulos com um lado coincidente com uma diagonal espacial do cubo

A partir de cada uma das diagonais espaciais do cubo, podem contar-se 6 triângulos, todos retângulos (como se mostra na figura 2).

Assim, a partir das 4 diagonais espaciais, podem obter-se 24 triângulos retângulos.

Pelo que, no total, podem obter-se 48 triângulos retângulos.

O Carlos Dias e a Graça consideraram três categorias de triângulos, consoante se verifique uma das seguintes condições (mutuamente exclusivas):

a) Os 3 vértices pertencem à mesma face do cubo (triângulos isósceles)
b) Uma (e só uma) aresta do cubo é também aresta do triângulo (triângulos escalenos)
c) Todos os 3 vértices pertencem a arestas diferentes (triângulos equiláteros)

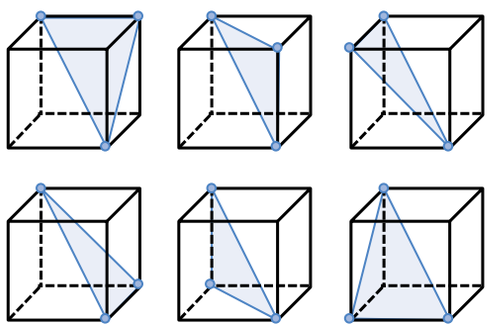


Figura 2

Nas categorias a) e b), cada uma tem 24 triângulos, todos eles retângulos.

Na categoria c) há oito triângulos que, obviamente, não são retângulos.

Já o Hugo e o Diogo seguiram esta via:

Ao escolher 3 vértices de um cubo, o triângulo será retângulo se as arestas do triângulo coincidirem em uma ou duas com as arestas do cubo. Definam-se os seguintes dois casos:

Caso A: o triângulo e o cubo têm uma aresta em comum.

Caso B: o triângulo e o cubo têm duas arestas em comum.

Há ainda um Caso C (o triângulo e o cubo não têm nenhuma aresta em comum) mas os 8 triângulos obtidos são equiláteros e portanto não podem ser retângulos.

Já o Mário avançou assim:

Uma primeira constatação: se dois dos vértices escolhidos pertencerem a uma mesma aresta [AB] do cubo, o triângulo em causa será necessariamente retângulo.

De facto, os «outros» seis vértices do cubo pertencerão então a faces perpendiculares a essa aresta, três numa face que contém o ponto A e os outros três numa face que contém o ponto B.

Como sabemos que uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas contidas nesse plano, escolhendo um «desses» seis vértices para «juntarmos» a A e a B teremos necessariamente um triângulo retângulo (em A ou em B).

«Resta-nos» então estudar as situações em que nenhum dos lados do triângulo é uma aresta do cubo. Ora isto obriga-nos a escolher 3 diagonais faciais de 3 faces concorrentes num vértice qualquer, formando assim um triângulo equilátero. Temos 8 triângulos (equiláteros) nestas condições, um em "torno" de cada um dos vértices.

A Catarina seguiu uma via ainda mais rápida:

Em cada vértice existem seis triângulos retângulos:

— três deles contendo duas arestas concorrentes nesse vértice e uma diagonal facial,

— outros três contendo uma aresta e a diagonal espacial, concorrentes também nesse vértice.

Como o cubo tem 8 vértices, logo o número de triângulos retângulos é $6 \times 8 = 48$.

O Alexandre, o Francisco e o Pedrosa, em vez de contar os triângulos retângulos, contaram os não retângulos.

Conclusão: há 48 triângulos retângulos.

Pergunta adicional

O número de casos possíveis são as combinações dos oito vértices, três a três, e os casos favoráveis são, como vimos anteriormente, 48.

$$P(\text{triângulo retângulo}) = \frac{48}{C_3^8} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

EIEM 2015, EM BRAGANÇA E EM OUTUBRO

O Encontro de Investigação em Educação Matemática 2015, organizado pela SPIEM, Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática, realiza-se nos dias 24 e 25 de outubro de 2015, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança, tendo como tema as Representações Matemáticas. Este encontro tem, como principais propósitos, refletir sobre o papel das representações matemáticas no ensino e na aprendizagem da Matemática, partilhar resultados de investigação e perspetivar e promover futuras investigações sobre o tema.

O EIEM 2015 destina-se a todos os investigadores, formadores ou professores que se interessem pela investigação em Educação Matemática e, em particular, sobre as representações matemáticas.

O encontro organiza-se em torno de três grupos de discussão (As representações e o ensino e a aprendizagem dos Números e da Álgebra; As representações e o ensino e a aprendizagem da Geometria; As representações e o ensino e a aprendizagem da Estatística e das Probabilidades) onde serão discutidos e analisados trabalhos de investigação, concluídos ou em curso, apresentados pelos participantes.

O envio do texto integral das propostas de comunicação oral ou de póster deve ser feito até 7 de setembro de 2015.

Mais informações podem ser obtidas em http://eiem2015.spiem.pt, sítio virtual do EIEM 2015.

Esperamos por todos em Bragança e em outubro . . .

A Comissão Organizadora do EIEM 2015