Dominó Algébrico: o algoritmo da divisão de uma forma lúdica

João Vitor Teodoro
Luiz Fernando de Souza Freitas

INTRODUÇÃO

O presente texto tem como principal objetivo apresentar mais uma importante ferramenta lúdica de se ensinar, o jogo Dominó Algébrico. Após a apresentação de suas regras e relações com a matemática, especificamente a divisão no conjunto dos inteiros que faz referência ao Algoritmo da Divisão e seus conceitos, alguns problemas são propostos. O conceito pode ser estendido para uma linguagem mais aprofundada que trata sobre relações de equivalência, mais especificamente a congruência. Espera-se que o texto facilite tanto no desempenho do jogador como na compreensão dos conceitos trabalhados.

O DOMINÓ ALGÉBRICO

O *Dominó Algébrico* é composto por peças similares às do dominó convencional, porém, os pontos marcados variam de zero (lado branco) a onze e, dado que cada pedra possui duas dessas numerações e não há peças repetidas, temos um número de peças igual a setenta e oito, além de seis peças especiais, que serão comentadas a seguir, totalizando oitenta e quatro peças (figura 1).

Podem jogar duas, três, quatro, seis ou oito pessoas, individualmente ou em duplas quando possível, sorteando e dividindo as peças entre elas, sem que possa restar alguma. Devem-se jogar várias partidas somando pontos e o jogador ou a dupla que acumular primeiramente seis vitórias, vence o jogo.

O objetivo do jogador é eliminar suas peças antes de qualquer oponente ou trancar o jogo, ou seja, criar uma situação onde ninguém tenha peças a serem jogadas, obtendo soma dos valores das peças não especiais do dominó em mãos inferior às dos oponentes.

Inicia o jogo quem obtiver a peça especial com inscrição Z_{12} que será colocada em jogo, após isso, o próximo a jogar será o da direita do jogador que iniciou e, assim, sucessivamente. Caso o jogador não tenha peça disponível para a situação de jogo, ele passa sua vez para o próximo jogador.

As peças especiais podem ser inseridas a qualquer momento, qualquer peça pode ser ligada às peças especiais e para que se entenda o procedimento das ligações restantes, o conceito de *Algoritmo da Divisão* será apresentado.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	3	4	5
3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
6	7	8	9	10	11	4	5	6	7	8	9
4	4	5	5	5	5	5	5	5	6	6	6
10	11	5	6	7	8	9	10	11	6	7	8
6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8
9	10	11	7	8	9	10	11	8	9	10	11
9	9	9	10	10	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}
9	10	11	10	11	11	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_6	Z_{12}

Figura 1.— Peças do Dominó Algébrico

Sabemos da *Álgebra* que, nos inteiros, a divisão de um número por outro nem sempre é possível, porém, é possível efetuar uma divisão com resto definido por meio do *Algoritmo da Divisão* (Domingues & Iezzi, 2003; Gonçalves, 1999).

Algoritmo da Divisão (*Divisão Euclidiana*): Sejam a e b dois números inteiros com $a > 0$. Então, sempre, podem-se encontrar dois números inteiros q e r tais que:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

Nessas condições, q e r são chamados, respectivamente, de quociente e resto da divisão de b por a.

No jogo, considerando as peças numeradas, cada valor b_1 de uma peça poderá ser ligado a um valor b_2 de outra peça se dada a última peça especial Z_a colocada em jogo, então as divisões euclidianas entre b_1 e b_2, ambos por a, obtiverem restos iguais, ou seja:

$$b_1 = a \times q_1 + r_1 \text{ e } b_2 = a \times q_2 + r_2, \text{ de forma que } r_1 = r_2$$

É importante salientar, antes de apresentar o *Algoritmo da Divisão* aos alunos, que essa teoria é necessária ao entendimento do funcionamento do jogo, ou seja, que é parte fundamental das regras.

Um exemplo de partida do *Dominó Algébrico* é apresentado:

Exemplo: Considerando quatro jogadores jogando individualmente, cada um receberá dezoito peças. Quem tiver a peça Z_{12} inicia a partida, assim, pode-se ligar qualquer peça a Z_{12}, e o jogo será jogado como de maneira tradicional até que se coloque outra peça especial, pois, cada valor quando dividido por 12 terá resto único, ou seja, nenhum outro número de 0 a 11, ao ser dividido por 12, terá resto igual (tabela 1).

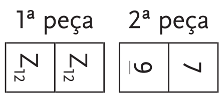

Figura 2.— Segunda peça

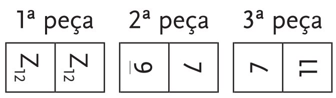

Figura 3.— Terceira peça

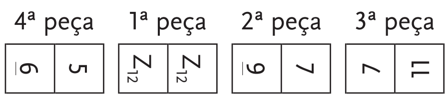

Figura 4.— Quarta peça

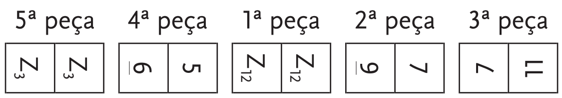

Figura 5.— Quinta peça

Assim, o próximo jogador, que colocará a *2ª peça*, pode ligar qualquer peça a Z_{12}, pois, ela é especial (figura 2).

O próximo a jogar, colocará a *3ª peça*, que poderá ser qualquer se ligada à Z_{12}. Se preferir, poderá ligar ao lado 7 também uma peça com valor 7 (como foi visto nas divisões anteriores). Ou uma peça especial em qualquer lado (figura 3).

O jogador que colocará a *4ª peça* poderá ligar à Z_{12} qualquer peça, ligar uma peça que contenha valor 11 à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado (figura 4).

O jogador que colocará a *5ª peça* poderá ligar uma outra que contenha valor 6 em um dos lados à *4ª peça*, uma que tenha valor 11 em um dos lados à *3ª peça* ou uma peça especial em qualquer lado (figura 5).

Tabela 1.— Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 12 mais resto.

$0 = 12 \times 0 + \mathbf{0}$
$1 = 12 \times 0 + \mathbf{1}$
$2 = 12 \times 0 + \mathbf{2}$
$3 = 12 \times 0 + \mathbf{3}$
$4 = 12 \times 0 + \mathbf{4}$
$5 = 12 \times 0 + \mathbf{5}$
$6 = 12 \times 0 + \mathbf{6}$
$7 = 12 \times 0 + \mathbf{7}$
$8 = 12 \times 0 + \mathbf{8}$
$9 = 12 \times 0 + \mathbf{9}$
$10 = 12 \times 0 + \mathbf{10}$
$11 = 12 \times 0 + \mathbf{11}$

Tabela 2.— Os números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11 como produto de 3 mais resto

$0 = 3 \times 0 + \mathbf{0}$
$1 = 3 \times 0 + \mathbf{1}$
$2 = 3 \times 0 + \mathbf{2}$
$3 = 3 \times 1 + \mathbf{0}$
$4 = 3 \times 1 + \mathbf{1}$
$5 = 3 \times 1 + \mathbf{2}$
$6 = 3 \times 2 + \mathbf{0}$
$7 = 3 \times 2 + \mathbf{1}$
$8 = 3 \times 2 + \mathbf{2}$
$9 = 3 \times 3 + \mathbf{0}$
$10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}$
$11 = 3 \times 3 + \mathbf{2}$

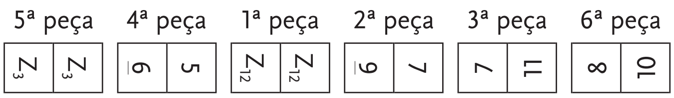

Figura 6.— Sexta peça

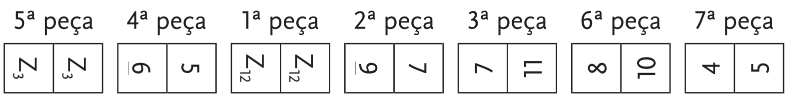

Figura 7.— Sétima peça

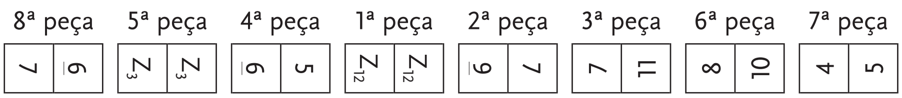

Figura 8.— Oitava peça

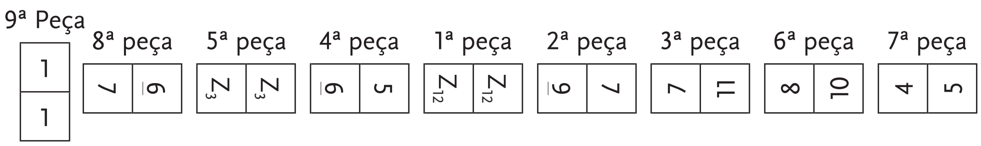

Figura 9.— Nona peça

Como uma peça especial foi colocada em jogo, o *a* em questão será 3, ou seja, ambos os valores das peças a serem ligadas devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, o jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com resto 2 na divisão por 3, que pode ser visto na tabela 2, ao lado 11 da *3ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 6).

O jogador seguinte pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 1 na divisão por 3 ao lado 10 da *6ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 7).

O próximo a jogar pode ligar qualquer peça à Z_3, ligar uma peça com lado de resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 8).

A peça a ser colocada agora, pelo próximo jogador, deve ter lado com resto 1 quando dividido por 3 se ligada à *8ª peça*, lado com resto 2 na divisão por 3 ao lado 5 da *7ª peça* ou colocar uma peça especial em qualquer lado (figura 9).

O jogo terminará quando um jogador eliminar suas peças ou todos não tiverem peças a serem colocadas.

Além da própria problematização oferecida diretamente no ato de jogar, alguns problemas extras podem, também, ser oferecidos como forma de aplicação direta e formal da teoria. Seguem alguns problemas que podem ser abordados:

Problema 1. Quando o jogo é iniciado, ou seja, a peça especial Z_{12} é inserida, quais valores podem ser ligados?

Solução. Nesse caso, deveremos ligar valores que tenham mesmo resto quando divididos por 12. Assim, como descrito na tabela 1, valores inteiros entre 0 e 11 quando divididos por 12, só quando forem iguais, coincidem os valores do resto.

Problema 2. Quando a peça especial Z_2 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 2. Dessa forma, como todos os números pares têm resto 0 na divisão por 2 e os ímpares, resto 1 na divisão por 2, então, poderão ligar entre si valores pares e poderão ligar entre si valores ímpares. Em particular se ligarão os valores oferecidos no jogo.

Problema 3. Quando a peça especial Z_3 é colocada em jogo, quais valores poderão ser ligados?

Solução. Os valores a serem ligados devem ter restos iguais quando divididos por 3. Dessa forma, como expresso na tabela 2, poderão ligar entre si 0, 3, 6 e 9, também poderão ligar entre si 1, 4, 7 e 10 e poderão ser ligados entre si também os valores 2, 5, 8 e 11.

Problema 4. Quais peças especiais fazem com que os valores 2 e 4 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 2 e 4 são:

$$Z_1, \text{ pois, } 2 = 1 \times 2 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 4 = 1 \times 4 + \mathbf{0};$$
$$Z_2, \text{ pois, } 2 = 2 \times 1 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 4 = 2 \times 2 + \mathbf{0}.$$

Problema 5. Qual peça especial permite que quaisquer valores possam se ligar até que outra peça especial seja colocada?

Solução. Somente a peça especial Z_1. Vejamos.

Vale para Z_1, pois, $b = 1 \times b + \mathbf{0}$ e $b' = 1 \times b' + \mathbf{0}$ para quaisquer b e b'.

Não vale para nenhum outro $Z_a \neq Z_1$, pois, sendo $a > 1$, dada a divisão euclidiana de b por a, então:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a.$$

Fazendo também a divisão euclidiana de $b + 1$ por a, então:

$$b + 1 = a \times q' + r', \quad \text{com } 0 \leq r' < a.$$

Assim,

- Se $0 \leq r + 1 < a$, então $r' = r + 1$ e $q' = q$, ficando:

  $$b + 1 = a \times q + (r + 1), \quad \text{com } 0 \leq (r + 1) < a,$$

  Desse modo, b e $b + 1$ não poderão ser ligados.
- Se $r + 1 = a$, então $r' = 0$, pois:

  $$b + 1 = a \times q + r + 1 = a \times q + a = a \times (q + 1) + 0$$

  Desse modo, $0 = r' \neq r = a - 1$, pois $a - 1 \neq 0$, já que $a > 1$.

  O que nos diz que b e $b + 1$ não poderão ser ligados.

Problema 6. Se, em meio a um jogo, liga-se o valor 5 ao 7 e, posteriormente o valor 7 ao 10, qual Z_a foi inserido por último no jogo?

Solução. Os valores 5 e 7 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_2. E, os valores 7 e 10 se ligarão quando for inserido Z_1 ou Z_3. Dessa forma, para que ambas as ligações ocorram, a peça especial a ser inserida por último deve ser Z_1.

Problema 7. Por que não se pode ter a peça especial Z_0?

Solução. Pelo algoritmo da divisão

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a$$

Se houvesse a peça especial Z_0, então, $a = 0$ e, portanto,

$$b = r, \quad \text{com } 0 \leq r < 0,$$

o que é um absurdo.

Problema 8. Quais peças especiais fazem com que os valores 7 e 10 possam ser ligados?

Solução. As peças especiais que permitem a ligação entre 7 e 10 são:

$$Z_1, \text{ pois, } 7 = 1 \times 7 + \mathbf{0} \quad \text{e} \quad 10 = 1 \times 7 + \mathbf{0};$$
$$Z_3, \text{ pois, } 7 = 3 \times 2 + \mathbf{1} \quad \text{e} \quad 10 = 3 \times 3 + \mathbf{1}.$$

Problema 9. Para o caso em que a peça Z_a esteja valendo no jogo. Quais valores terão resto 0?

Solução. Pelo algoritmo da divisão

$$b = a \times q + r, \text{ com } 0 \leq r < a$$

Se $r = 0$, então,

$$b = a \times q, \text{ com } 0 < a,$$

ou seja, para valores múltiplos de a.

Problema 10. Mostre que os valores b e b' podem ser ligados quando a última peça especial colocada em jogo for Z_a se, e somente se, $b - b' = a \times k$, para algum k inteiro.

Solução.

($\Rightarrow$) Como b e b' podem ser ligados, então:

$$b = a \times q + r \quad \text{e} \quad b' = a \times q' + r$$

Fazendo $b - b'$ obtemos:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r) =$$
$$= a \times q + r - a \times q' - r = a \times q - a \times q'$$

Colocando a em evidência:

$$b - b' = a \times (q - q')$$

Como q e q' são inteiros, então, $q - q' = k$, onde k é inteiro. Portanto,

$$b - b' = ak.$$

($\Leftarrow$) Se $b - b' = ak$ e, como b e b' podem ser expressos através do algoritmo da divisão na divisão por a:

$$b = a \times q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < a$$

e

$$b' = a \times q' + r', \text{com } 0 \leq r' < a$$

Fazendo $b - b'$:

$$b - b' = a \times q + r - (a \times q' + r') = ak \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a \times q + r - a \times q' - r' = ak$$

Colocando a em evidência:

$$a \times (q - q') + r - r' = ak$$

Mas, como ak é inteiro para a e k inteiros, então, $(q - q') = k$ e $r - r' = 0$, logo, $r - r'$ e, assim, b e b' podem ser ligados.

A noção estabelecida anteriormente pode ser estendida através de conceitos introduzidos pela *Álgebra Abstrata*. Tais conceitos são, geralmente, oferecidos no nível superior. Todos os problemas resolvidos utilizando o *Algoritmo da Divisão* podem ser resolvidos utilizando a notação de *Relação de Equivalência*, e o jogo pode ser jogado utilizando ambas as linguagens apresentadas.

RELATO DE UMA APLICAÇÃO

O *Dominó Algébrico* foi aplicado em uma oficina a nove alunos matriculados nos primeiro e quarto anos em um curso de licenciatura em matemática. Partes dessa aplicação foram registradas em vídeo e, posteriormente, avaliadas.

Em geral, o jogo foi bem aceito, todos os participantes jogaram corretamente e, aparentemente, divertiram-se, produzindo entre os jogadores o desenvolvimento de um conteúdo matemático de forma descontraída e lúdica.

Essa aplicação permitiu a elaboração de alguns dos problemas que não estavam no material, principalmente o *Problema 7*, que foi motivado por indagações por parte de alunos do primeiro ano, e o *Problema 5* que havia sido deixado em aberto, principalmente sobre a possibilidade da resposta ser Z_0, ocasionando uma suposta divisão por zero.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A problemática oferecida pelo jogo exige do aluno o domínio teórico e estratégico envolvendo conceitos matemáticos. Para jogar, é necessário entender e respeitar as regras e, para isso, é preciso dominar o conhecimento matemático que, aprimorado, melhora o desempenho e aumenta as chances de sucesso do jogador.

O jogo começa a ser tratado como coisa séria e os professores enxergam nele uma forma construtivista de ensinar, além de tornar o ato de jogar ou brincar uma forma divertida de aprender, resultando numa aula mais rica e descontraída. «Jogar não é estudar nem trabalhar, porque jogando, o aluno aprende, sobretudo, a conhecer e compreender o mundo social que o rodeia.» (Groenwald & Timm, 2000, p. 21).

Referências

Domingues, H. & Iezzi, G. (2003). *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual.

Gonçalves, A. (1999). *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: Impa.

Groenwald, C. & Timm, U. (2000). Utilizando curiosidades e jogos matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*. São Paulo.

João Vitor Teodoro
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

Luiz Fernando de Souza Freitas
Universidade Estadual de Campinas, Brasil