

# Funções e Folha de Cálculo

Maria da Paz Martins  
Maria Teresa Capelão

Ao longo da nossa  
prática lectiva,  
sentimos a  
necessidade de novas  
formas de abordagem  
da Matemática.  
No ano lectivo de  
1989/90, decidimos  
realizar uma  
experiência em duas  
turmas do 11º ano,  
relacionada com o  
estudo das funções e  
envolvendo o uso da  
Folha de Cálculo.

O trabalho realizado com as duas turmas do 11º ano teve como objectivos:

- fazer o estudo das funções e dos elementos de análise a partir da interpretação gráfica;
- dar ao aluno um lugar mais activo no processo de aprendizagem;
- estimular e desenvolver no aluno as capacidades necessárias à compreensão e à intervenção nos problemas correntes do mundo envolvente;
- estimular a atitude crítica do aluno, o gosto de organizar raciocínios e de comunicar.

Com a integração da Escola no Projecto Minerva e com os vários tipos de software colocados à nossa disposição, decidimos utilizar na nossa sala de aula, o computador como recurso e o programa Folha de Cálculo, atendendo às suas potencialidades.

A Folha de Cálculo é um programa interactivo: o utilizador fornece os dados e as relações entre eles, pode alterá-los, analisando os efeitos produzidos por essa mudança, liberta o utilizador de cálculos repetitivos, permite com facilidade a elaboração de gráficos de diversos tipos e possui funções lógicas, trigonométricas, aritméticas e estatísticas. A possibilidade de interligar estruturas de carácter numérico, algébrico, lógico e gráfico permite compreender melhor as situações.

## Organização do trabalho

Foi proposto às turmas a utilização da Folha de Cálculo e, como metodologia, o trabalho de grupo.

Os alunos levantaram algumas questões:

“Como trabalhar com a Folha de Cálculo? Será difícil?”

“A matéria vai ser dada? Vamos cumprir o programa?”

“Se pedirmos transferência para outra Escola estaremos em condições de nos integrarmos em qualquer outra turma?”

Depois de alguma discussão, os alunos deram o seu aval à experiência, entusiasmados com a utilização do computador e o trabalho em pequeno grupo, embora com a salvaguarda de a suspender se chegassemos à conclusão que não estava a resultar.

Participaram na experiência 34 alunos, sendo 12 da turma de Economia e 22 da turma de Quimicotecnia. A experiência decorreu ao longo de todo o ano e cada aluno utilizou o computador em média 2 horas por semana.

Uma vez que o Núcleo Minerva só dispunha de 4 computadores, os alunos trabalharam em grupos de 3 (na turma de Economia) e 2/3 (na turma de Quimicotecnia). Nesta, os grupos organizaram o trabalho a desenvolver e ocuparam os computadores rotativamente.

No final de cada actividade, cada grupo elaborou um relatório escrito que foi depois apresentado e discutido em grande grupo (toda a turma).

A discussão na turma ajudou à síntese do trabalho realizado, à clarificação e compreensão dos conceitos, ao levantamento de novas questões e propostas de actividades.

## Funções trigonométricas

Para o estudo das funções trigonométricas como funções reais de variável real, apresentámos o seguinte problema:

No relógio representado na figura, o ponteiro dos minutos mede 1 cm.

Determina as posições da extremida-



de do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 11h 15m.

E entre as 10h 15m e as 12h 15m?

Supondo que precisas atrasar o relógio quais as posições da extremidade do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 9h 15m?



Os alunos começaram por escolher um referencial e fazer o estudo de cada uma das funções que representam as coordenadas dos pontos que correspondem às posições da extremidade do ponteiro dos minutos.

Pensámos que iriam surgir várias funções uma vez que há diversas soluções para a escolha do referencial, mas todos os alunos optaram pelo sistema de eixos coordenados com origem no centro do relógio.

Fixado o referencial, identificaram o relógio com o círculo trigonométrico e para definir as coordenadas dos pontos fizeram corresponder à abcissa a função co-seno e à ordenada a função seno.

Construíram uma folha de cálculo e estudaram as restrições das funções seno e co-seno aos intervalos:

$[-2\pi, 0]$  - posição da extremidade do ponteiro dos minutos entre as 10h 15m e as 11h 15m;

$[-4\pi, 0]$  - entre as 10h 15m e as 12h 15m;

$[0, 2\pi]$  - quando se atrasa o relógio das 10h 15m para as 9h 15m.

Por exemplo, para o estudo das funções no intervalo  $[-4\pi, 0]$  veja-se a figura 1.

A 1ª coluna apresenta os valores das amplitudes do ângulo  $x$ ; os valores correspondentes nas 2ª e 3ª colunas foram facilmente calculados introduzindo na 1ª linha de cada coluna, respectivamente, as funções  $\cos x$  e  $\sin x$  e utilizando o endereço da célula relativa ao 1º dado da coluna das amplitudes e copiando-as ao longo dessas colunas.

Construíram os gráficos das funções  $f(x) = \cos x$  e  $g(x) = \sin x$  (ver fig.2).

Como a Folha de Cálculo constrói os gráficos ligando por segmentos de recta os pontos, foi necessário alterar o incremento da variável independente para os tornar mais precisos.

A partir da análise dos gráficos, os alunos fizeram o estudo das funções, indicando o domínio, o contradomínio, os zeros e a variação do sinal, a monotonia, os máximos e os mínimos, a paridade e o período.

Na aula de síntese foi formalizado o conceito de período de uma função e, utilizando este conceito, prolongou-se o estudo das funções  $\sin x$  e  $\cos x$  a  $\mathbb{R}$ . A

amplitudes	abcissas	ordenadas
$x$	$f(x)=\cos x$	$g(x)=\sin x$
-12.5664	1	0
-12.4093	.9876883	.1564345
-12.2522	.9510565	.3090170
-12.0951	.8910065	.4539905
-11.9381	.8090170	.5877853
-11.7810	.7071068	.7071068
-11.6239	.5877853	.8090170
-11.4668	.4539905	.8910065
-11.3097	.3090170	.9510565
-11.1527	.1564345	.9876883
-10.9956	0	1
-10.8385	-.156434	.9876883
-10.6814	-.309017	.9510565
-10.5243	-.453990	.8910065
-10.3673	-.587785	.8090170
-10.2102	-.707107	.7071068
-10.0531	-.809017	.5877853

Fig. 1

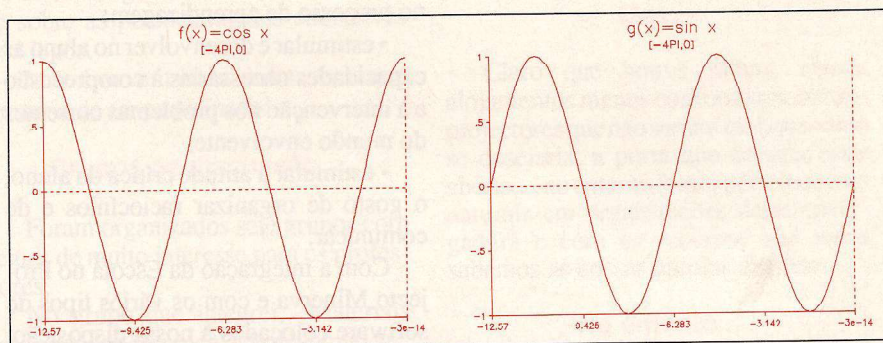


Fig. 2

Folha de Cálculo mostra o valor das células tornando-se mais fácil entender o significado do número  $\pi$  e o argumento de cada razão trigonométrica como um número real. Foi ainda sugerido aos alunos que escolhessem outros referenciais. Um dos escolhidos foi o que tem como centro o ponto da circunferência

que limita o mostrador do relógio junto do calendário. Este referencial permitiu o estudo da função  $h(x) = -1 + \cos x$  e dado que a Folha de Cálculo permite a definição simultânea de vários gráficos do mesmo tipo ou de tipos diferentes, os alunos construíram gráficos das funções  $f(x) = \cos x$  e  $h(x) = -1 + \cos x$  (ver fig.3).

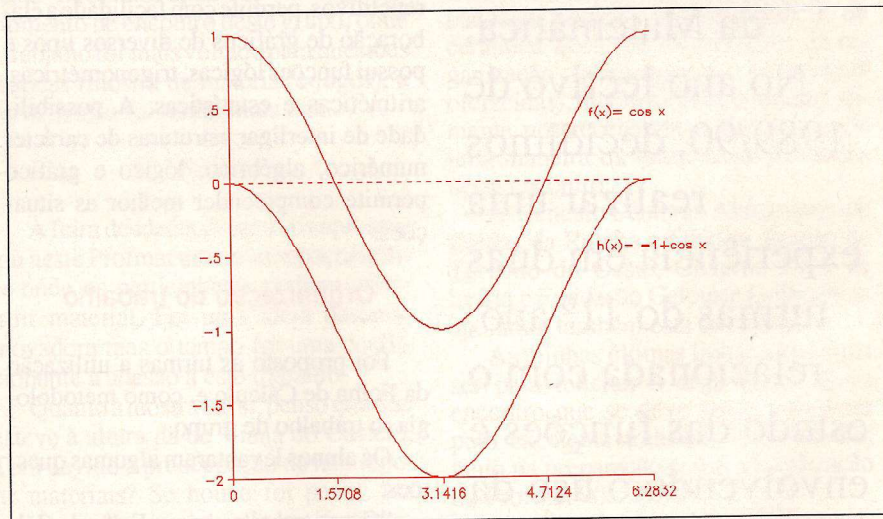


Fig. 3



Assim, através do estudo comparativo dos mesmos, observaram que o segundo gráfico pode obter-se do primeiro por meio de uma translação associada ao vector  $(0, -1)$ .

Foi proposto ainda o estudo de outras funções, como por exemplo  $y = \tan x - 1$ .

Pelo facto de a Folha de Cálculo ligar por segmentos de recta os pontos, surgiu o gráfico da fig. 4. Este gráfico suscitou alguns comentários:

“Que esquisito! Tem zeros onde não está definida!”

“O nosso computador está maluco!”

O grupo da mesa ao lado, sem olhar para o ecrã do computador dos colegas, retorquiu:

“Fizeram asneira!”

Mas passados alguns segundos:

“O nosso gráfico também está estranho. Tem um segmento de recta oblíquo!”

“Deixem ver o vosso gráfico.”

“O melhor é ver se introduzimos bem os dados!”

Feita a verificação dos dados nos dois grupos, por sugestão da professora os 5 alunos reuniram-se para analisar a questão.

“O segmento de recta oblíquo não existe. Vamos enganar o computador, construindo o gráfico a partir da sobreposição das restrições da função aos intervalos  $]-\pi/2, \pi/2[$  e  $]\pi/2, 3\pi/2[$ ” (fig. 5).

Na sequência das questões levantadas, foi introduzido o conceito de assíntota a uma curva.

Os alunos comentaram:

“O segmento de recta oblíquo corresponde a uma assíntota vertical. Se diminuirmos o incremento da variável independente, os valores ficam mais próximos de  $\pi/2$ .”

“Vamos experimentar!”

Os alunos diminuíram o incremento e observaram o gráfico, concluindo que o segmento de recta se aproximava da vertical. Alteraram o incremento até a posição do segmento “parecer” vertical (ver fig. 6).

### Avaliação

No final de cada uma das actividades, foi feito, com a colaboração dos alunos, um balanço que nos deu orientações sobre

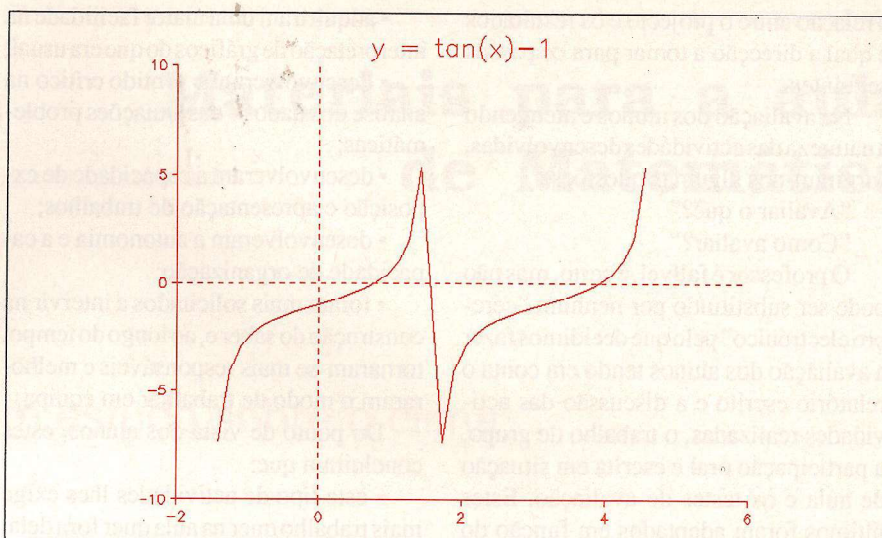


Fig. 4

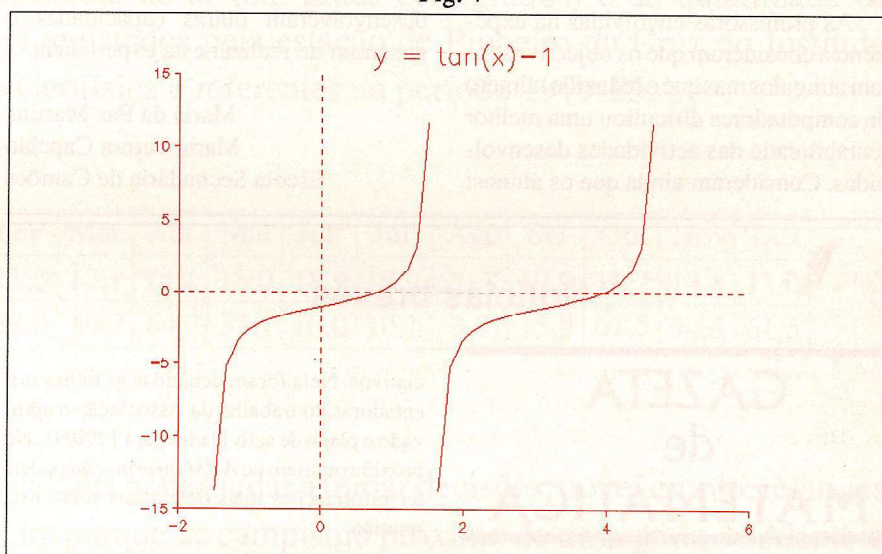


Fig. 5

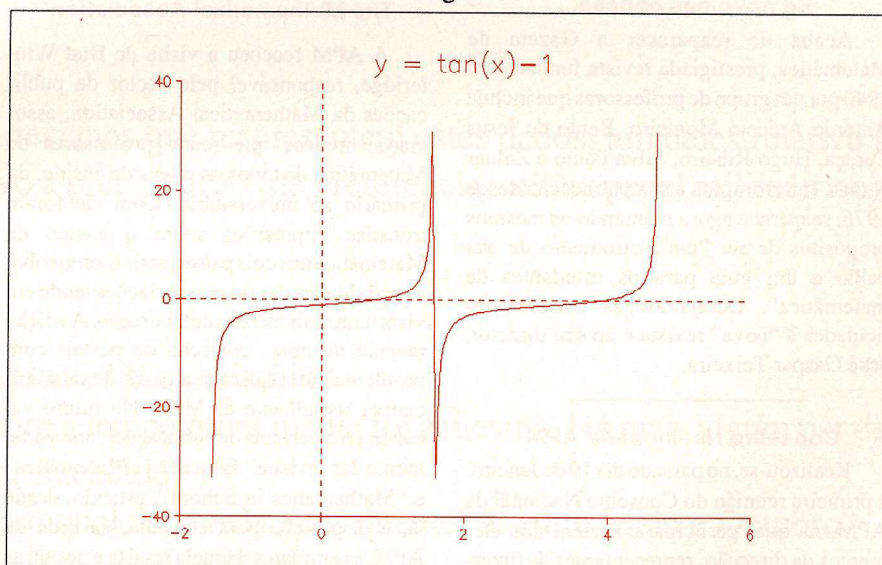


Fig. 6



a relação entre o projecto e os resultados e qual a direcção a tomar para os passos seguintes.

Na avaliação dos alunos e atendendo à natureza das actividades desenvolvidas, surgiram-nos algumas questões:

“Avaliar o quê?”

“Como avaliar?”

O professor é falível, é certo, mas não pode ser substituído por nenhum “cérebro electrónico” pelo que decidimos fazer a avaliação dos alunos tendo em conta o relatório escrito e a discussão das actividades realizadas, o trabalho de grupo, a participação oral e escrita em situação de aula e os testes de avaliação. Estes últimos foram adaptados em função do tipo de aprendizagem.

As professoras envolvidas na experiência consideram que os objectivos foram atingidos mas que o reduzido número de computadores dificultou uma melhor rentabilidade das actividades desenvolvidas. Consideram ainda que os alunos:

- adquiriram uma maior facilidade na interpretação de gráficos do que era usual;
- desenvolveram o sentido crítico na análise dos dados e das situações problemáticas;

- desenvolveram a capacidade de exposição e apresentação de trabalhos;
- desenvolveram a autonomia e a capacidade de organização;

- foram mais solicitados a intervir na construção do saber e, ao longo do tempo, tornaram-se mais responsáveis e melhoraram o modo de trabalhar em equipa.

Do ponto de vista dos alunos, estes concluíram que:

- este tipo de actividades lhes exige mais trabalho quer na aula quer fora dela;

- fazendo embora menos exercícios, desenvolveram outras capacidades e gostaram de realizar esta experiência.

Maria da Paz Martins

Maria Teresa Capelão

Escola Secundária de Camões

## Materiais para a aula de Matemática

A ficha de trabalho “Um estudo sobre o clima” foi proposta em 89/90 nas turmas associadas ao Projecto MAT<sub>789</sub> tendo constituído no 8º ano uma das actividades da unidade sobre Funções — que é descrita neste número da revista, num artigo da nossa colega Leonor Cunha Leal.

A mesma ficha foi proposta aos alunos do 7º ano, mas neste caso a intenção foi “apenas” de proporcionar uma experiência de construção e interpretação de gráficos num contexto real sem se pretender avançar na formalização de conceitos mais abstractos. Uma actividade pode não estar imediatamente ligada a um tópico do programa — desde que, em si mesma, tenha interesse e seja significativa enquanto experiência de trabalho.

Dada a sua natureza e o seu objectivo central (proporcionar oportunidades para o uso de ideias matemáticas em situações da realidade) a ficha poderá ser proposta a alunos de diferentes anos. A nossa experiência sugere as seguintes ideias:

- A ficha é adequada para trabalho em pequenos grupos.

- Numa aula, os grupos poderão trabalhar as quatro primeiras questões. A quarta desempenha um papel central, ao pedir um relatório em que é preciso usar dados numéricos mas num contexto de aplicação, para ilustrar ou defender uma ideia. Além disso, apela à imaginação dos alunos (que tenderão a imaginar nomes para a “sua” agência, inventar “slogans”, etc.).

- A quinta questão poderá motivar a ajuda do professor de Geografia e/ou a observação de um pluviómetro.

- A última questão é adequada para uma discussão geral na aula seguinte, depois de os alunos terem tido tempo para pensar e escrever as suas ideias.

- Seria útil que os relatórios (pelo menos) fossem entregues ao professor para uma avaliação mais atenta.

E uma recomendação: falar de “objectos” e “imagens” em vez de meses e temperaturas, ou desprezar os aspectos extra-matemáticos envolvidos, pode ser uma ótima maneira de estragar tudo. Mesmo a presença óbvia da Matemática...

Paulo Abrantes

## Notícias breves

# GAZETA de MATEMÁTICA

### De novo nas bancas...

Acaba de reaparecer a Gazeta de Matemática, prestigiada revista fundada em 1940 por um grupo de professores que incluía António Aniceto Monteiro, Bento de Jesus Caraça, Hugo Ribeiro, Silva Paulo e Zaluar Nunes. Interrompida a sua publicação desde 1976, reaparece agora mantendo os mesmos propósitos de ser “um instrumento de trabalho e um guia para os estudantes de matemática”. Desejamos as maiores felicidades à “nova” revista e ao seu director, José Gaspar Teixeira.

### Conselho Nacional da APM

Realizou-se, no passado dia 19 de Janeiro, a primeira reunião do Conselho Nacional da APM, na qual participaram, além dos elementos da direcção, representantes de diversos núcleos da APM e de outros órgãos asso-

ciativos. Nela foram debatidas as linhas orientadoras do trabalho da Associação e aprovado o plano de actividades para 1990/91. No próximo número do *APM Informação* poderá ler informações mais detalhadas sobre esta reunião.

### The Mathematical Association

A APM recebeu a visita de Bud Winteridge, responsável pelo sector de publicações da Mathematical Association, associação inglesa que reúne professores de Matemática de todos os níveis de ensino, do primário ao universitário. Com ele foram trocadas impressões sobre o ensino da Matemática nos dois países, assim como sobre as actividades das duas associações tendo em vista uma mais estreita colaboração. A edição recente de uma colecção de postais com problemas foi realizada a partir de uma iniciativa semelhante da M.A.. No futuro vai existir uma permuta de publicações, nomeadamente das revistas “Educação e Matemática” e “Mathematics in School”, estando, desde já, à disposição para consulta, na sede da APM, exemplares daquela revista e de outras publicações.