O centro desaparecido de uma circunferência

José Luiz Pastore Mello

Todo professor que costuma utilizar o compasso na lousa sabe que com alguma frequência a ponta seca escorrega e... pronto, está perdido o centro da circunferência! Recuperá-lo é uma tarefa simples se, além do compasso, temos uma régua em mãos, bastando para isso encontrar o ponto de intersecção das mediatrizes de dois segmentos secantes à circunferência. O fato inusitado é que, mesmo não dispondo de uma régua em mãos, também é possível recuperar o centro perdido da circunferência utilizando apenas o compasso, porém, essa é uma tarefa bem mais complexa. Você sabe como se faz isso?

Mais surpreendente do que saber que o problema de recuperar o centro perdido da circunferência tem solução usando apenas o compasso é o fato de que Lorenzo Mascheroni, poeta e matemático italiano do século XVII, demonstrou no livro *Geometria del Compasso*, publicado em 1797, que toda construção euclidiana que pode ser feita com régua e compasso, também pode ser realizada apenas com o compasso. Por essa descoberta Mascheroni recebeu várias honrarias da academia de ciência italiana. Curiosamente, em 1928, um estudante de matemática encontrou em uma livraria de Copenhague um velho livro, datado de 1672, de autoria de um obscuro matemático chamado Gerog Mohr, que continha a demonstração do resultado obtido por Mascheroni. Não podemos dizer que Mascheroni plagiou Mohr porque as demonstrações conduzidas por ambos são diferentes, porém, é possível cogitar que Mascheroni tenha tido algum contato com o livro de Mohr. Polêmica a parte, o resultado demonstrado por ambos os matemáticos é conhecido atualmente como teorema de Mohr-Mascheroni.

Inspirados pela discussão engendrada por esse teorema, estudos iniciados pelo matemático francês Jean Victor Poncelet, e concluídos pelo matemático suíço-alemão Jacob Steiner, deram conta de provar posteriormente que nem todas as construções euclidianas podem ser realizadas apenas com o uso de uma régua, porém, contando-se com uma circunferência e seu centro já traçados no plano da construção, a régua se torna suficiente para todas as construções, o que é conhecido como teorema de Poncelet-Steiner.

Voltando ao problema da localização do centro desaparecido da circunferência apenas com o uso do compasso, hoje em dia ele pode ser resolvido de forma relativamente simples utilizando-se o recurso de uma transformação geométrica denominada inversão. Tal recurso foge do contexto da matemática escolar básica, porém, isso não inviabiliza a busca de uma solução, ainda que complexa, com recursos elementares de desenho geométrico, o que será apresentado a seguir. Antes de mergulharmos na resolução do problema, fica a recomendação para o leitor: você irá apreciar melhor a demonstração se utilizar um compasso e uma folha de rascunho para investigar cada passagem descrita a seguir.

As linhas traçadas nas figuras são apenas representações para facilitar a compreensão da demonstração. Nossa regra proíbe o uso da régua, e permite o uso do compasso apenas no traçado de circunferências centradas em pontos já construídos e passando por pontos já construídos.

Dada a circunferência λ_1 de centro desconhecido (figura 1), comece marcando dois pontos quaisquer X e Y sobre ela. Em seguida, com o compasso marque os pontos A e B na

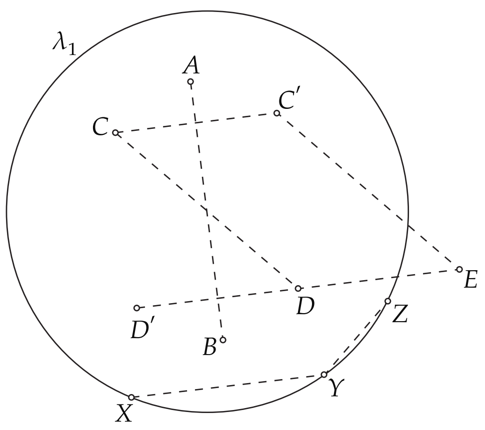

Figura 1

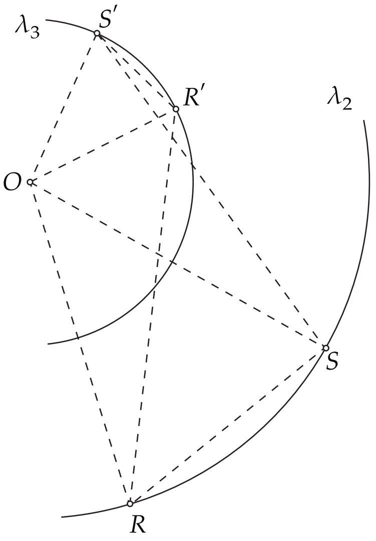

Figura 2

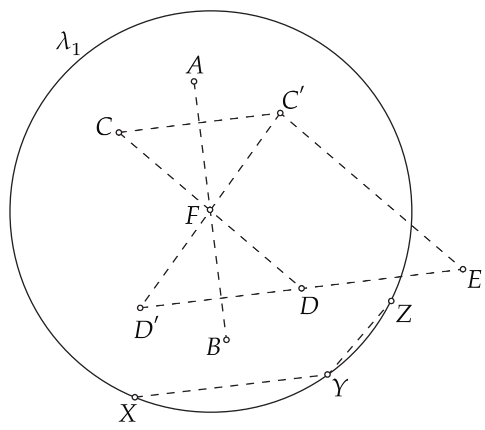

Figura 3

mediatriz de $\overline{XY}$ (é possível fazer isso usando apenas o compasso). Marque um ponto Z em λ_1, o que definirá $\overline{YZ}$. Marque os pontos C e D na mediatriz de $\overline{YZ}$. Trace os simétricos de C e D em relação à $\overline{AB}$, nomeando-os de C' e D', respectivamente (isso também pode ser feito só com o compasso, tente!). Construa o ponto E, que deve ser vértice de um paralelogramo $DCC'E$. Como $\overline{DE}$ e $\overline{DD'}$ são paralelos à $\overline{CC'}$, segue que D', D e E são colineares (figura 1). Por ora deixe em suspenso essa construção para obter, em outra figura, a quarta proporcional entre $\overline{D'E}$, $\overline{D'D}$ e $\overline{C'E}$, que será nomeada de K, e obtida por .

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{k}{C'E}.$$

Construa as circunferências concêntricas λ_2 e λ_3 de raios congruentes à $\overline{D'E}$ e $\overline{D'D}$, denotando o centro por O (figura 2). Sobre λ_2 marque os pontos R e S de forma que $\overline{RS}$ seja congruente à $\overline{C'E}$. Escolha uma abertura no compasso que permita traçar os pontos R' e S' em λ_3 de forma que $\overline{RR'}$ e $\overline{SS'}$ sejam congruentes. Tal construção garante que os triângulos ORR' e OSS' sejam congruentes. Como $m(\angle ROR') = m(\angle SOS')$, segue que $m(\angle SOR) = m(\angle S'OR')$. Os triângulos SOR e $S'OR'$ são isósceles, com $m(\angle SOR) = m(\angle S'OR')$, o que permite concluir que são semelhantes, pelo caso LAL de semelhança. Segue que

$$\frac{OS'}{OS} = \frac{R'S'}{RS}$$

ou, de forma análoga, que

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{R'S'}{C'E},$$

o que implica dizer que $R'S' = k$.

De volta à λ_1, com o compasso centrado em D e depois em D', e raio de medida k, trace o ponto F na intersecção das duas circunferências (figura 3). Uma vez que

$$\frac{D'D}{D'E} = \frac{k}{C'E},$$

segue que D', F e C' estão alinhados (conseqüência do fato de que os triângulos $D'C'E$ e $D'FD$ são semelhantes com razão de semelhança k). Uma vez que F está nas mediatrizes de $\overline{XY}$ e de $\overline{YZ}$, ele será o centro perdido de λ_1 (figura 3).

Em tempos que o desenho geométrico tem sido tão pouco explorado na escola, o problema apresentado costuma mobilizar intensamente o interesse dos alunos.

José Luiz Pastore Mello
Colégio Santa Cruz, em São Paulo, Brasil