

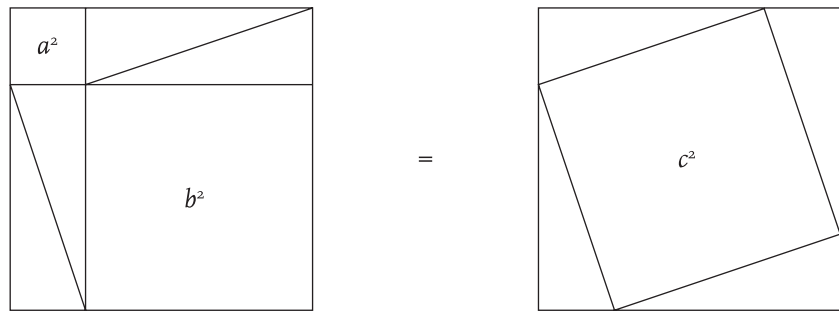
# O confronto do **PMEB2007** com o **PMEB2013** nas vizinhanças da demonstração

PATRÍCIA DAMAS BEITES



O Programa de Matemática do Ensino Básico que vigorou desde 2008/2009 e que termina a sua aplicação em 2014/2015 no 9.º ano (PMEB2007) foi, até há pouco tempo, adjectivado como novo por apenas recentemente se ter generalizado a todos os anos de escolaridade. A partir de 2013/2014 começou a ser substituído pelo actual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB2013), cujos descritores surgiram, com data de criação anterior, nas Metas Curriculares de Matemática para o Ensino Básico (MCMEB2012).

As diferenças entre o substituto e o predecessor surgem logo, na estrutura organizacional. Em primeiro lugar, para um dado ano de escolaridade do Ensino Básico, não resulta prática a consulta do PMEB2013 e das MCMEB2012, mesmo com um só ficheiro pdf resultante da mera junção dos dois documentos. Seria mais cómodo ter um só documento sem a duplicação de informação no que concerne aos significados dos verbos que explicitam os desempenhos a evidenciar pelos alunos, com os respetivos descritores próximos de cada conteúdo. Em segundo lugar, o PMEB2007,



**Figura 1.**— Decomposições de um quadrado para uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

para além de possuir essa boa característica de ter os objetivos próximos dos tópicos a que correspondem, é rico em notas complementares que visavam esclarecer o alcance dos primeiros e apresentar sugestões metodológicas, o que não sucede no PMEB2013. Precipitadamente, tal pode ser justificado pela existência de cadernos de apoio às MCMEB2012, mais um documento a consultar por ciclo, mas os mesmos revelam explicações com muitas palavras, o que não se traduz em muitas ideias, e são de leitura nem sempre fácil.

O que se poderá dizer no âmbito da demonstração?

Tomando o clássico Teorema de Pitágoras como ponto de partida, após traçar uma altura de um triângulo retângulo, os passos de uma demonstração recorrendo à semelhança de triângulos são elencados nas MCMEB2012. Uma sugestão de demonstração do teorema no PMEB2007 é por decomposição de quadrados, continuidade natural da exploração da decomposição de figuras. Esta continuidade não surge no PMEB2013 sob o pretexto aparente (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012c) de evitar propriedades da noção de área, pela complexidade concetual de uma teoria rigorosa da medida de área.

Mas considerando a Figura 1, o rigor consegue-se pela fundamentação seguinte: na parte esquerda da figura, após decomposição do quadrado em dois quadrados e dois retângulos, estes decompostos em triângulos, há que justificar que os quatro triângulos obtidos são retângulos e congruentes; na parte direita da figura, há que justificar que, aplicando o caso LAL, os quatro triângulos desenhados são congruentes

entre si e congruentes com os que estão na parte esquerda da figura e ainda que a parte central obtida com o referido desenho, por análise dos ângulos dos triângulos, é um quadrado.

No PMEB2013 e documentos associados há preocupações inegavelmente científicas, que se voltam a notar com a referência à não validade do Teorema de Pitágoras em geometrias não Euclidianas, mas não abundam as de outra índole. Em contrapartida, na Brochura de apoio ao PMEB2007 para o ensino da Geometria e Medida encontram-se várias demonstrações do teorema, acompanhadas de considerações históricas e didáticas, que proporcionam diversidade de opções e de completação de abordagens.

Antes de mais alguns cotejos no âmbito da demonstração, convém ter presentes as funções da demonstração e o tratamento desta, sem a redução ao Teorema de Pitágoras, nos mencionados documentos oficiais.

## A DEMONSTRAÇÃO NA MATEMÁTICA E NO ENSINO

Não se pode fazer Matemática, como Ciência, sem demonstrar! A demonstração, na qual o raciocínio matemático marca sempre presença, é essencial para compreender, estabelecer e comunicar o conhecimento matemático. No ensino da Matemática, enquanto disciplina escolar, o papel fundamental da demonstração é a promoção da compreensão (Hanna, 2000), devendo convencer através da razão e não pela autoridade (Lima, 1999).

Mas, o que é uma demonstração? Não havendo a pretensão de discutir aqui as muitas definições de demonstração existentes, uma deve-se a Keith Devlin. Por razões por este apontadas a definição de que é um argumento que convence um matemático da verdade de um certo enunciado, traduz o que os matemáticos fazem (Devlin, 2003), Devlin questiona quando é que se está perante uma demonstração, o que remete para uma conceptualização. Consequentemente há que pensar nos elementos que devem estar presentes numa demonstração, como os listados por Stylianides (2007): fundamentos (definições, lemas,...); argumentação (como se desenvolve; por exemplo, inferindo com *modus ponens*); representação (como se expressa; com linguagem algébrica, natural ou pictórica); dimensão social (aceitação na comunidade matemática em que se cria).

Em contexto escolar, no que se refere à dimensão social, a comunidade matemática é substituída pela comunidade da aula de que fazem parte o professor e os alunos. Os fundamentos, a argumentação e a representação devem ser os adequados ao nível de escolaridade dos alunos que a integram. Há ainda a realçar que, apesar do raciocínio marcadamente dedutivo na elaboração de uma demonstração, os alunos devem experienciar outras formas de raciocínio que, frequentemente e previamente, um matemático utiliza na sua investigação. Em particular, o raciocínio indutivo, após a construção de exemplos, manifesta-se através da formulação de conjecturas, estas posteriormente testadas mediante exemplos e contraexemplos.

A título ilustrativo, em Stylianides (2007), analisa-se um episódio de aula em que um aluno, do 3.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, utilizou a linguagem natural num argumento dedutivo para demonstrar que a soma de dois números naturais ímpares é um número par. Previamente ao mencionado raciocínio dedutivo, os alunos experimentaram casos particulares e formularam, com a mediação da professora, uma conjectura. Esta surgiu perante a tarefa de investigação, de acordo com a tipificação de Ponte (2005), norteada pela questão de saber a paridade da soma de dois números naturais ímpares. Trata-se de um tipo de tarefa, aberta e com desafio elevado, que é indispensável «para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática» (Ponte, 2005, p. 26).

## A DEMONSTRAÇÃO NO PMEB2007

O PMEB2007 refere-se à demonstração a propósito dos objetivos gerais, das capacidades transversais no âmbito do raciocínio matemático e das orientações metodológicas.

No mencionado documento oficial, enquanto capacidade transversal aos três ciclos, a demonstração goza de uma perspetiva de continuidade e de evolução, como fica claro na pretensão: «À medida que os alunos progredem nos diversos ciclos de ensino as suas justificações devem ser mais gerais, distinguindo entre exemplos e argumentos matemáticos gerais para toda uma classe de objetos.» (Ponte *et al.*, 2007, p. 5).

Reflexo da posição descrita, seguindo a terminologia usada por Costa e Tadeu (2006) no âmbito de uma análise transversal de programas de Matemática anteriores a 2007, no PMEB2007 há, por um lado, referências explícitas e, por outro lado, referências implícitas à demonstração. Estas últimas referências presenciam-se através de expressões indicadoras da preocupação com o desenvolvimento das capacidades de raciocinar, de argumentar e de demonstrar em Matemática.

Pertencentes ao conjunto das referências implícitas, a título de exemplo, em Ponte *et al.* (2007) têm-se: no 1.º Ciclo, «Explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos» e «Formular e testar conjecturas relativas a situações matemáticas simples» (p. 31); no 2.º Ciclo, «Explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contra-exemplos» e «Formular e testar conjecturas e generalizações e justificá-las fazendo deduções informais» (p. 47); no 3.º Ciclo, «justificação de estratégias» e «argumentação apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos.» (p. 63).

Naturalmente, não se encontram referências explícitas no 1.º Ciclo e no 2.º Ciclo. No que diz respeito ao 3.º Ciclo, no PMEB2007, nota-se uma solicitação evolutiva da argumentação para a demonstração, esta também referida em conexão com outra capacidade:

O Raciocínio matemático é outra capacidade fundamental, envolvendo a formulação e teste de conjecturas e, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Os alunos devem compreender o que é uma generalização, um caso particular e um contra-exemplo. Além disso, o raciocínio matemático envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas, recorrendo à linguagem dos Números, da Álgebra e da Geometria. No fim do 3.º ciclo, os alunos devem ser capazes de distinguir entre raciocínio indutivo e dedutivo e reconhecer diferentes métodos de demonstração. (Ponte *et al.*, 2007, p. 8).

No 3.º Ciclo, entre diversas referências explícitas à demonstração, surgem no PMEB2007 em Ponte *et al.* (2007): «Demonstrar o Teorema de Pitágoras» (p. 54); «oportunidade

para os alunos com melhor desempenho matemático demonstrarem algebricamente a fórmula resolvente» (p. 57); «Propor a exploração de casos particulares de modo a induzir a regra da potência da potência. Os alunos com melhor desempenho matemático podem demonstrar esta regra.» (p. 49); «Os alunos com melhor desempenho matemático podem ter um primeiro contacto com a demonstração, por redução ao absurdo, da irracionalidade da  $\sqrt{2}$ .» (p. 50); «Desenvolver nos alunos (...) a compreensão das transformações geométricas e da noção de demonstração» e «compreender a noção de demonstração e ser capazes de fazer raciocínios dedutivos» (p. 51).

No entanto, com exceção essencialmente do tema Geometria, dirigem-se a alunos com melhor desempenho matemático. O referido tema é considerado como o mais propício para os alunos se familiarizarem com o processo de demonstração, em sintonia com o que tem sido documentado em diversos estudos (ver Hanna (2000) e referências aí citadas). Neste âmbito, refere-se ainda que

Na resolução de problemas geométricos, como nas tarefas exploratórias e de investigação, é importante que os alunos tenham um tempo apropriado para realizar experiências, elaborar estratégias, formular conjecturas, descrever processos e justificá-los com rigor progressivo. Ao elaborarem justificações, produzindo pequenas cadeias dedutivas, familiarizam-se com o processo de demonstração e iniciam o raciocínio geométrico dedutivo. Os alunos devem recorrer a software de Geometria Dinâmica. (Ponte *et al.*, 2007, p. 51).

O PMEB2007 parece marcar uma mudança, valorizando o raciocínio matemático de forma explícita e a demonstração em particular.

## A DEMONSTRAÇÃO NO PMEB2013

Entre muitas, a primeira referência à demonstração no PMEB2013 surge numa das três finalidades do ensino da Matemática, sob a designação de «A estruturação do pensamento» (Bivar *et al.*, 2013, p. 2). Notam-se aí referências implícitas à demonstração, nomeadamente, nas expressões «argumentar» e «justificar» e «raciocínio hipotético-dedutivo».

Mais adiante, embora se refira que o raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, reconhece-se o papel do raciocínio indutivo na, paradoxalmente, única página do PMEB2013 em que se presencia a palavra conjectura:

Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas (...) após a análise (...) de situações particulares. Deverão saber, no entanto, que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades, e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a

conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras (...) devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las (Bivar *et al.*, 2013, p. 4).

Apesar de esta ser também a única página do PMEB2013 onde se encontra a expressão raciocínio matemático, a palavra raciocínio surge, no âmbito dos objetivos, associada à comunicação matemática. Refere-se que «os alunos devem ser incentivados a redigir convenientemente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio» (Bivar *et al.*, 2013, p. 5). No entanto, a mencionada palavra nas MCMEB2012, com exceção de «raciocínio circular» (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 72), surge sempre com o adjetivo «dedutivo».

A intenção da solicitação evolutiva da demonstração nos objetivos do PMEB2013 fica patente nos desempenhos, a evidenciar pelos alunos, que os traduzem. Neste sentido, nas MCMEB2012, os autores alertam para diferenças no significado preciso de verbos empregues no início de alguns descritores, explicando que estas se devem aos distintos ciclos a que dizem respeito. O desempenho denominado por «Reconhecer», que se refere a um certo resultado e que constitui uma referência implícita à demonstração, surge em (Bivar *et al.*, 2013):

[1.º Ciclo] reconhecer intuitivamente a veracidade do enunciado em causa em exemplos concretos. Em casos muito simples, poderá apresentar argumentos que envolvam outros resultados já estudados e que expliquem a validade do enunciado.... [2.º Ciclo] conhecer o resultado e saber justificá-lo, eventualmente de modo informal ou recorrendo a casos particulares. No caso das propriedades mais complexas, deve apenas saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados pelo professor para as deduzir, bem como saber ilustrá-las utilizando exemplos concretos. No caso das propriedades mais simples, poderá ser chamado a apresentar de forma autónoma uma justificação geral. ... [3.º Ciclo] apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos (...) nessa explicação. (p. 3).

Assim, em cada ciclo, o verbo reconhecer, através de uma repetição textual das MCMEB2012, reveste-se de um significado mais forte do que no ciclo anterior. Há ainda a registar, na página seguinte à citada do PMEB2013 e nas MCMEB2012, uma variante do referido verbo, «Reconhecer, dado», a qual pretende indicar a justificação de casos concretos de um enunciado mas sem exigência de prova geral. A título de exemplo, tem-se: «4. Reconhecer, dado um número racional  $q$ , que  $-(-q) = q$ .» (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 38).

Com caráter menos exigente do que o atribuído ao verbo reconhecer, surge o verbo «Justificar» na página 47 das MCMEB2012. Este, que aparece com a descrição de significado igual à que consta na página 4 do PMEB2013, prende-se com uma justificação simples de um enunciado, que o aluno deve dar, recorrendo a uma propriedade conhecida. De realçar que tal se reduz ao 3.º Ciclo, aparecendo só, indiretamente, nos outros ciclos através do verbo reconhecer. De modo consentâneo, o verbo justificar só consta dos níveis de desempenho esperados no 3.º Ciclo.

Observações semelhantes às do verbo reconhecer, ao longo do Ensino Básico, podem ser feitas para os desempenhos «Identificar/designar» e «Estender» no PMEB2013. A diferença entre ciclos nota-se sobretudo no último verbo, pois este é empregue, no 3.º Ciclo, no sentido de estender uma definição e/ou uma propriedade a um universo mais vasto e, nos ciclos anteriores, para utilizar a designação e para conseguir definir a noção com esse nome, reconhecendo que se trata de uma generalização. Novamente, as palavras utilizadas são as empregues nas MCMEB2012. Surge ainda o verbo «Verificar», tenuemente com uma só ocorrência nos descritores, para a validade da relação de Euler em poliedros convexos.

No 3.º Ciclo, mas só neste, encontram-se referências explícitas à demonstração, nomeadamente a que consta no desempenho designado por «Provar/Demonstrar». Refere-se que «O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.» (Bivar *et al.*, 2013, p. 4; Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 47). Ainda na citada penúltima página, no contexto do raciocínio matemático, volta a vincar-se a importância do raciocínio hipotético-dedutivo como sendo o meio para chegar à elaboração de demonstrações, mesmo que pequenas. Em complemento, nos preliminares dos conteúdos no PMEB2013, diz-se ser essencial que os alunos comecem a utilizar corretamente termos, como definição e teorema, e processos demonstrativos específicos da Matemática.

Apesar das referências explícitas à demonstração serem abundantes nos vários domínios de conteúdo do PMEB2013 com exceção de Organização e Tratamento de Dados, aquele que é considerado como o mais favorável para a sua abordagem é Geometria e Medida. Neste sentido, destaca-se a apresentação de teoremas fundamentais como o de Tales e, um seu corolário, o de Pitágoras. Salienta-se ainda, mais uma vez, o raciocínio hipotético-dedutivo: «Um objetivo geral dedicado à axiomática da geometria permite enquadrar historicamente toda esta progressão e constitui um terreno propício ao desenvolvimento do raciocínio hipotético-dedutivo dos alunos.» (Bivar *et al.*, 2013, p. 19).

Coadunando-se com a mencionada consideração da Geometria e Medida no PMEB2013, há a realçar o subdomínio «Axiomatização das teorias Matemáticas», referente ao 9.º ano. Os objetivos gerais no mencionado subdomínio das MCMEB2012, associados a descritores que começam com os verbos «Identificar», «Reconhecer», «Designar», «Saber», visam a utilização correta de vocabulário do método axiomático e o conhecimento de factos da axiomatização no âmbito da Geometria. No sentido descrito, também já mencionado a respeito do PMEB2013, surgem as noções de teoria, definição, axioma, proposição, lema, teorema, hipótese e tese, condição necessária e condição suficiente, corolário e demonstração. Os autores destacam ainda o perigo do raciocínio circular ao escreverem:

Reconhecer, no âmbito de uma teoria, que para não se incorrer em raciocínio circular ou numa cadeia de deduções sem fim, é necessário fixar alguns objetos («objetos primitivos»), algumas relações entre objetos que não se definem a partir de outras («relações primitivas»), e algumas proposições que se consideram verdadeiras sem as deduzir de outras («axiomas»). (Bivar, Grosso, Oliveira, & Timóteo, 2012d, p. 72).

As referências explícitas à demonstração aparecem ainda na secção do PMEB2013 dedicada aos níveis de desempenho, os quais são considerados nos descritores das MCMEB2012. Concretamente, as mesmas surgem para se atingirem níveis de desempenho avançados, referindo-se a propriedades que devem ser demonstradas mas não se exigem à generalidade dos alunos, embora todos devam conhecer o enunciado e estar aptos a aplicá-las.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS SOBRE PMEB2007 VERSUS PMEB2013

Indiscutivelmente, nos diferentes níveis de ensino, as demonstrações e suas formas precursoras devem ser apresentadas, pedidas e trabalhadas. No PMEB2007 e no PMEB2013, através de referências implícitas e de referências explícitas, o papel da demonstração é reconhecido, com ênfase exagerada no PMEB2013 e documentos associados. À semelhança do que ocorria no PMEB2007, no PMEB2013 continua a considerar-se a Geometria e Medida como o domínio mais propício para os alunos se familiarizarem com a demonstração. Contudo, não só neste domínio, o PMEB2013 e as MCMEB2012 parecem assentar na excessiva preocupação com a axiomatização, transmitindo a valorização da formalização pela formalização.

Há a realçar que a atividade de justificar é desvalorizada nos documentos que substituem o PMEB2007. A mesma,

no PMEB2013, surge nas finalidades e nos desempenhos correspondentes aos verbos «Reconhecer» e «Reconhecer, dado». Podem efetivamente encontrar-se diversas ocorrências da palavra justificar nas MCMEB2012, mas parece que a atividade associada só começa a ser realmente importante no 3.º Ciclo do Ensino Básico. De facto, só na «Leitura das Metas Curriculares do 3.º ciclo» aparece o verbo «Justificar», o qual traduz a justificação de enunciados evocando propriedades conhecidas dos alunos. Mas esta é uma atividade acessível a alunos dos ciclos anteriores! No 2.º Ciclo, a atividade de justificar constitui um subalterno do desempenho «Reconhecer» e o mesmo, em menor escala, sucede no 1.º Ciclo, no qual não surge, ininteligivelmente, qualquer referência à necessidade de justificação de ideias matemáticas.

Reconhece-se, em todos os documentos anteriormente referidos, a ligação da demonstração com o raciocínio matemático, mas no PMEB2013 destaca-se excessivamente o de tipo dedutivo. Em particular, no domínio de conteúdo Geometria e Medida não se refere diretamente o raciocínio indutivo, nomeadamente a formulação de conjeturas, mas antes o raciocínio hipotético-dedutivo através dos desempenhos associados aos verbos «Provar/Demonstrar». De um modo mais geral, por um lado, a palavra conjetura não aparece nas MCMEB2012. Por outro lado, esta só surge fugazmente num parágrafo de uma página do PMEB2013, mas não se indo além da sua menção no âmbito do papel fundamental do raciocínio indutivo e dos perigos deste poder levar a conclusões erradas.

O produto final das atividades de um matemático são as desejadas demonstrações com raciocínio dedutivo. Mas, precedendo-o, há atividades matemáticas fundamentais que envolvem outros tipos de raciocínio com forte presença no PMEB2007. Nomeadamente, a formulação e o teste de conjeturas, que são indissociáveis de exemplos e de contraexemplos. A convivência entre os raciocínios indutivo e dedutivo no PMEB2007 começa por traduzir-se no 1.º Ciclo nas atividades de conjeturar e de justificar e, mais tarde, nos processos mentais mais complexos que poderão conduzir a uma demonstração. Não transparecendo claramente a possibilidade de aprender a raciocinar indutivamente no PMEB2013, parecem eliminar-se as oportunidades de aprender a conjeturar e a compreender, por um lado, o significado e o papel dos contraexemplos na Matemática, e, por outro lado, a necessidade e a relevância de demonstrar..

## Referências Bibliográficas

- Beites, P. D. (2013). *A demonstração na Matemática e no Ensino*, Notas de uma Sessão inserida num Curso de Formação em Matemática organizado pelo Núcleo Regional da Covilhã da APM.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012c). *Caderno de Apoio às Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico, 3.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2012d). *Metas Curriculares de Matemática — Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Damião, H., Festas, I., Grosso, C., Oliveira, F., & Timóteo, M. C. (2013). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H., & Oliveira, P. (2011). *Brochura de apoio ao Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) para o ensino da Geometria e Medida*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.
- Costa, C., & Tadeu, P. (2006). A demonstração nos programas de Matemática: Uma análise transversal. In J. P. da Ponte, L. Serrazina, A. Guerreiro, C. Ribeiro, L. Veia (Eds.), *Actas do ETEM 2006* (pp. 1–7). Lisboa: SPCE.
- Devlin, K. (2003). When is a proof?. *Devlin's Angle*. Consultado em janeiro, 2015, de [http://www.maa.org/external\\_archive/devlin/devlin\\_06\\_03.html](http://www.maa.org/external_archive/devlin/devlin_06_03.html)
- Filipe, M. (2013). *Resolução de Tarefas no Tema Números e Operações no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário*. Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário, Universidade da Beira Interior.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Lima, E. L. (1999). Conceituação, manipulação e aplicações. *Revista do Professor de Matemática*, 41, 1–6.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). Lisboa: APM.
- Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.
- Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 1–20.

PATRÍCIA DAMAS BEITES

UNIVERSIDADE DA BEIRA INTERIOR