Batalha Geométrica

Quatro amigos meus descobriram o jogo *Batalha Geométrica* e resolveram fazer um campeonato entre eles, com atribuição final de medalhas de ouro, prata e bronze para os três primeiros classificados.

Quando os voltei a encontrar perguntei-lhes qual tinha sido a classificação final. Eis o que me disseram:

Manuela: «Fiquei à frente do Eduardo. A Florinda ficou atrás de mim.»

Rita: «Fiquei em primeiro. O Eduardo não teve nenhuma medalha.»

Florinda: «Nem a Manuela nem o Eduardo receberam a medalha de ouro. Quem ficou em primeiro fui eu.»

O Eduardo manteve-se calado.

Descobri depois que não houve empates na classificação final e que, das duas frases ditas por cada um, uma era verdadeira e a outra falsa.

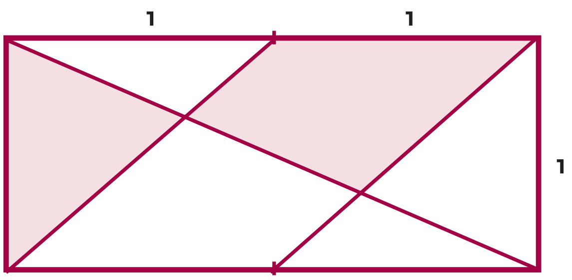
A quem foram atribuídas as medalhas?

(Respostas até 18 de julho, para zepaulo46@gmail.com)

UM PROBLEMA NO PROBLEMA

O problema proposto no número 130 de *Educação e Matemática* fez parte de um dos concursos Canguru Matemático. Foi-me apresentado pela Teresa Pimentel (Viana do Castelo) como exemplo de um problema que pode ser resolvido por muitos processos. Ei-lo:

A professora Teresa projetou no quadro o seguinte enunciado: Qual é a área da zona sombreada desta figura?



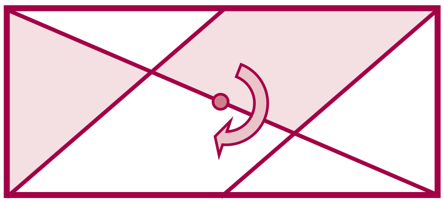
Depois, disse aos seus alunos:

— Quero que cada um de vocês resolva este problema por dois métodos diferentes.

Podem os leitores da Educação e Matemática ajudar estes alunos com duas maneiras distintas de chegar à solução?

Recebemos 16 respostas: Alberto Canelas (Queluz), Alice Martins (Torres Novas), Carlos Farias e seus alunos (Covilhã), Catarina Ferreira (Viseu), Francisco de Matos Branco (Ovar), Graça Braga da Cruz (Ovar), Hugo Silva, João Pereira, José Paulo Coelho (Moura), Mário Roque (Guimarães), Pedro Miguel Resende (Ovar), Pedrosa Santos (Caldas da Rainha) e do Grupo de Trabalho de Geometria (Eduardo, Florinda, Manuela & Rita). Além destes, José Carlos Pereira e José Luís Freitas discutiram e resolveram o problema no facebook.

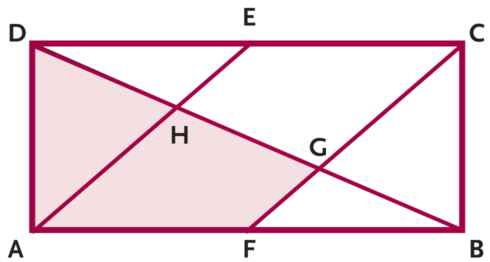
Foram muitos os métodos e processos de chegar à solução. Alguns deles eram pequenas variações de outros. Vamos mostrar os principais métodos geométricos.



1.º Método

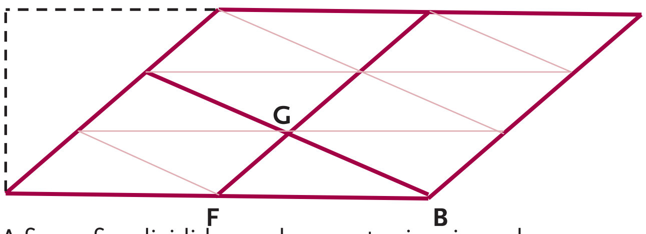
Rodar o quadrilátero sombreado em torno do centro da figura.

Área pedida = $A_{ADB} - A_{BFG}$



Fazer a translação do ΔADE segundo o vetor $\vec{AB}$.

Traçar as linhas auxiliares indicadas.



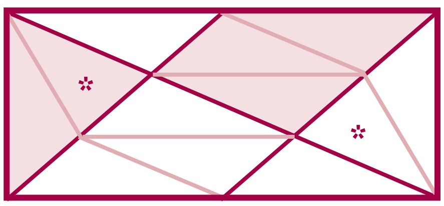
A figura fica dividida em doze partes iguais, cada uma com área 1/6.

$$\text{Área pedida} = A_{ADB} - A_{BFG} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

2.º Método

Fazer a partição do retângulo conforme se mostra na figura.

O retângulo fica dividido em doze triângulos. Dez deles são

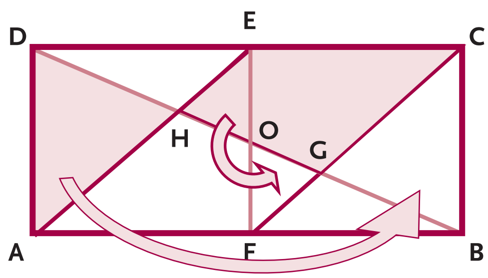


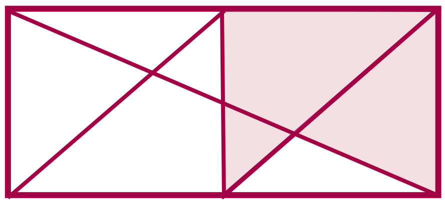
congruentes. Os outros dois, assinalados com asterisco, são diferentes dos anteriores mas são equivalentes (todos têm a mesma área). Assim, a área pedida é 5/12 da área total.

$$\text{Área sombreada} = 2 \times \frac{5}{12} = \frac{5}{6}$$

3.º Método

Rodar os triângulos EOH e ADH de 180 graus em torno do centro O da figura.





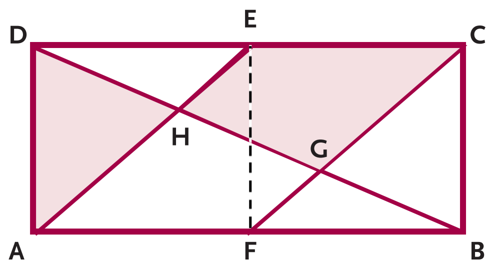
$$\text{Área}_{BFG} = \frac{1}{6} \quad \text{(como se viu no 1.º Método)}$$

$$\text{Área pedida} = A_{BCEF} - A_{BFG} = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

4.º Método

A área da zona sombreada é a soma de duas subáreas: a do triângulo ADH com a do trapézio CEHG.

O retângulo pode ser dividido em quatro triângulos retân-



gulos de áreas iguais a 1/2. O paralelogramo central, que é constituído por dois desses triângulos, tem área igual a 1. Como esse paralelogramo é também constituído por dois trapézios iguais, concluímos que a área de GCEH é 1/2.

Por outro lado, aplicando, por exemplo, o teorema de Thales, concluímos que os segmentos de reta DH, HG e GB são iguais, medindo cada um deles um terço da diagonal do retângulo. As suas projeções sobre o lado maior do retângulo são também iguais, medindo cada uma delas 2/3. Logo, a altura do triângulo ADH relativa ao lado AD é 2/3, pelo que a sua área é de 1/3.

$$\text{Área sombreada} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

5.º Método

Representemos por X a área sombreada.

Observando a figura do método anterior, constata-se que a área do retângulo é a soma de duas áreas sombreadas com duas vezes a área do triângulo menor BFG (que representaremos por **Y**), ou seja:

$$2X + 2Y = 2 \qquad \text{(i)}$$

Por outro lado o triângulo ABH é semelhante ao triângulo BFG, sendo a razão de semelhança igual a 2, pelo que a área do triângulo ABH é 4 vezes a área do triângulo BFG, ou seja, é igual a 4Y.

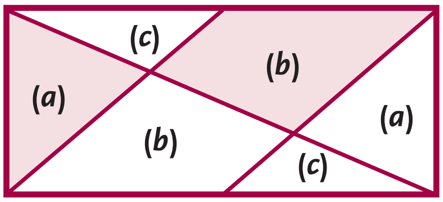
Se representarmos a área de ADH por Z, podemos escrever:

$$Z + Y = 1/2$$
$$Z + 4Y = 1$$

Resolvendo este sistema, vem $Y = 1/6$.

Substituindo em (i) conclui-se que $X = 5/6$ unidades de superfície.

6.º Método



Área pedida $= a + b$

$a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b = 1 - c$

$2b = 1 \Leftrightarrow b = 0{,}5$

O triângulo formado por (b)+(c) é semelhante ao triângulo (c). A razão de semelhança é 2, porque a base do maior é o dobro da do menor.

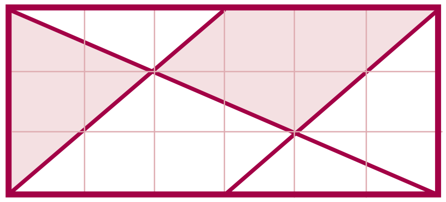
$b + c = 4c \Leftrightarrow b = 3c$

Então, $0{,}5 = 3c \Leftrightarrow c = \dfrac{1}{6}$

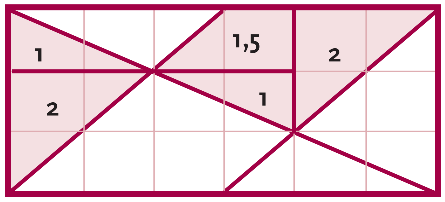
Logo, $a + b = \dfrac{5}{6}$

7.º Método

A figura dada tem simetria central. Essa simetria e o teorema de Thales garantem que a diagonal fica dividida em três partes iguais. Divida-se cada uma dessas partes ao meio e tracem-se paralelas e perpendiculares aos lados do retângulo.



O retângulo fica dividido em 18 quadrados iguais, dos quais 7,5 são sombreados.



A área de cada quadrado é 2/18.

$$\text{Área sombreada} = 7{,}5 \times \frac{2}{18} = \frac{5}{6}$$

Considerações finais

Apareceram ainda mais métodos, uns usando apenas a geometria analítica, outros combinando-a com a geometria tradicional. São, no entanto, mais pesados e visualmente menos apelativos. Optámos por não os incluir aqui.