Arte Contemporânea no Ensino das Transformações Geométricas

Diogo Batista, António Guerreiro e António Lopes

Associamos a ideia de transformação geométrica ao movimento de um objeto no plano. No entanto, não se trata de uma deslocação, mas antes de uma repetição, não apenas do objeto, mas de todos os pontos do plano (Veloso, 2012). Por mais que o movimento seja um auxiliar valioso na imaginação de qualquer transformação geométrica e no desenvolvimento do sentido espacial, essencial na resolução de problemas geométricos, o facto é que o conhecimento das definições geométricas é imprescindível para a compreensão dos mesmos problemas.

Transformações Geométricas

Transformação geométrica é definida como uma «correspondência biunívoca entre os pontos do plano» (Bastos, 2007: 26), mais especificamente, «uma transformação geométrica T é uma correspondência que associa a cada ponto P de R^2 um e um só ponto P' de R^2, verificando as seguintes condições: (a) Se P e Q são dois pontos distintos, então os pontos correspondentes P' e Q' são também distintos; (b) se U é um ponto qualquer de R^2, então existe um ponto V de R^2 tal que o seu correspondente pela transformação geométrica T é U» (Veloso, 2012: 5).

Esta definição engloba as transformações por semelhança, que, apesar de não alterarem a razão da distância entre um par de pontos, *alteram* a distância entre os pontos. No 2.° ciclo do ensino básico, nível de ensino desta investigação, o estudo das transformações geométricas está reservada às que preservam a distância entre quaisquer dois pontos P e Q, ou seja, às isometrias. As transformações em causa são as seguintes:

Translação (figura 1). Definido pelo vetor $\vec{v}$, faz corresponder a cada ponto P, do plano, o ponto P', do plano, tal que, pela translação T do plano, o triângulo $[XYZ]$ é copiado para onde, e até onde, o vetor $\vec{v}$ *apontar* (Palhares, 2004; Veloso, 2012).

Reflexão (figura 2). Dado um eixo e, a reflexão R, faz corresponder a cada ponto P, do plano, o ponto P', do plano, onde $E=E'$ e o triângulo $[XYZ]$ é refletido sobre e (Palhares, 2004).

Rotação (figura 3). Sejam dados um ponto C e um ângulo orientado φ, a rotação R, faz corresponder o ponto P, do plano, ao pontoP', do plano, tal que a imagem de $C=C'$ e o ângulo $X'CY'$, formado na transformação do triângulo $[XYZ]$, é igual ao ângulo XCY (Veloso, 2012).

Quem leciona o tópico matemático das transformações geométricas estranhará o facto de não nos referimos às simetrias. Ainda que as simetrias correspondam a uma isometria, é uma isometria tal que qualquer ponto P', transformado de P, coincide com o ponto P, referindo-se assim à transformação de um conjunto de pontos que deixam a figura transformada invariante, isto é, o transformado do plano é o próprio plano (Bastos, 2006), assumindo, desta forma, a singularidade de casos particulares das isometrias apresentadas.

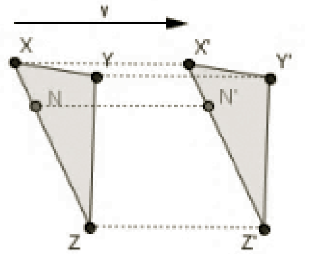

Figura 1.—Representação da translação T por $\vec{v}$

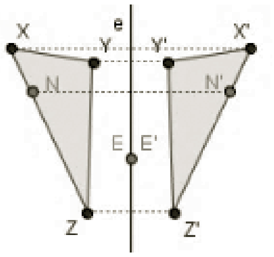

Figura 2.—Representação da reflexão R por e

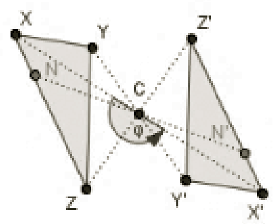

Figura 3.—Representação da rotação R com centro em C e amplitude φ

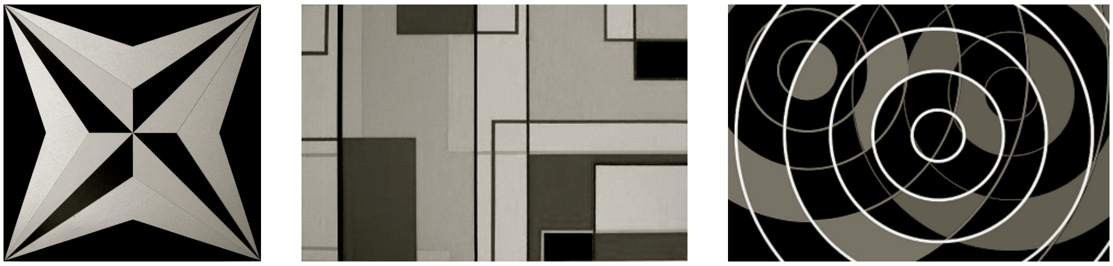

Figura 4.—Obras de Nassos Daphnis

Geometria em Nassos Daphnis

As obras de Nassos Daphnis (figura 4), nas quais ressalta uma combinação rígida, *nervosa* e dinâmica de diferentes formas geométricas, refletem o seu percurso de vida. Tendo desenhado, durante a Segunda Guerra Mundial, a camuflagem da campanha italiana, onde aprendeu a pintar com cores densas e opacas, e trabalhado na florista da família, onde adquiriu uma sensibilidade única para a cor e uma profunda compreensão de geometria natural, Daphnis acabou por desenvolver um traço duro e até mesmo preciso, em que o dinamismo depende da justaposição de cores primárias, arranjadas em triângulos, em retângulos, em linhas retas e curvas. Para Daphnis, o mais importante era colocar a cor no plano correto, pois dizia ser a única forma dela existir, pelo que foi referenciado pela crítica como um purista moderno preocupado com o diálogo das cores puras, presas em bandas regulares (Grimes, 2010).

Partindo do princípio de que a construção da matemática resulta de ligações livres com a realidade, a arte plástica, que labora com imagens de uma imaginação que raciocina — «imagens que provam» (Tavares, 2013: 33) —, oferece-se a nível pedagógico como uma ferramenta óbvia na exploração do plano e do espaço. Relacionando conceitos teóricos ao desenho geométrico, os alunos desenvolvem uma compreensão tão intelectual quanto física, possibilitando não só a exploração criativa dos objetos geométricos desenhados, como das transformações geométricas implícitas e inerentes ao próprio desenho (Tavares, 2013).

Design de Investigação e Intervenção em Sala de Aula

O *design* de investigação atende à compreensão das perspetivas dos participantes no estudo, procurando fazer luz sobre a dinâmica da atividade dos sujeitos, valorizando o significado da ação em resultado da observação participante no contexto de sala de aula. Esta intervenção educativa em sala de aula foi mediada pelo aluno/professor, primeiro autor deste artigo, em contexto de prática de ensino supervisionada, tendo por objeto de estudo os alunos do 2.° ciclo do ensino básico e por recurso a recolha de dados, a gravação áudio das aulas e as produções matemáticas dos alunos.

A recolha de dados decorreu durante o ano letivo 2013/2014, em três aulas do 6.° ano de escolaridade, numa turma com vinte e um alunos, na Escola Básica 2,3 Dr. Alberto Iria, em Olhão, no âmbito de uma investigação em educação matemática integrante do relatório de prática de ensino supervisionada do mestrado em Ensino do 1.° e 2.° Ciclos do Ensino Básico, Universidade do Algarve. Na primeira aula, dinamizou-se uma atividade de exploração de objetos geométricos, com base na *geometria visível* patente nas obras contemporâneas de Daphnis (figura 5). A segunda aula, antecipada pela clarificação dos conceitos relativos às transformações geométricas, foi marcada pela leitura da *geometria invisível*, isto é, pelas dinâmicas constitutivas das obras do pintor, em que cada aluno indicou e identificou as isometrias *escondidas*, aplicadas aos objetos geométricos, suporte das mesmas pinturas. Na terceira aula, de-

Obra Um — Obra Dois — Obra Três — Obra Quatro — Obra Cinco

Figura 5.—Obras analisadas pelos alunos

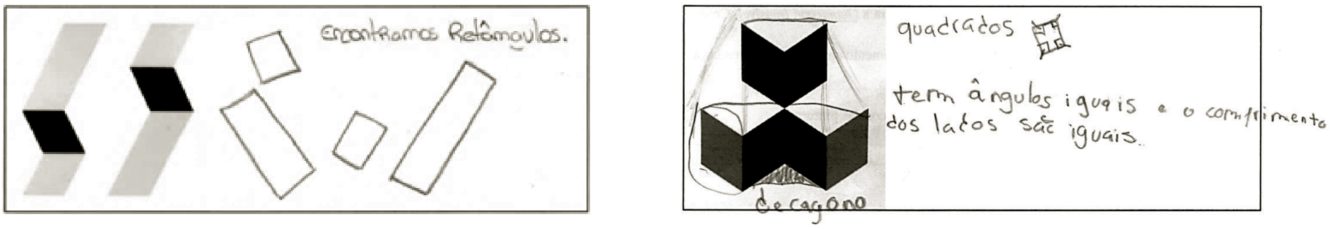

Figura 6.—Registos da Jéssica [Retângulos] e da Cheila [Quadrados]

Figura 7.—Registos da Vanda [Triângulos] e da Beatriz [Círculos]

signada *geometria dos alunos*, estes recorreram a materiais de medição e de desenho e modificaram a expressão global das obras, procurando combinações de cores e transformações orgânicas das formas geométricas.

Arte Contemporânea e Transformações Geométricas

Geometria Visível. Na *geometria visível* analisa-se a resposta dos alunos à geometria que ocupa visivelmente espaço (Tavares, 2013). Os alunos estudam os objetos visíveis no plano, identificam e distinguem diferentes formas geométricas em obras do pintor.

Dos dados recolhidos junto dos alunos, fica a perceção de que o raciocínio geométrico assume um sentido visual ilusório ao identificarem na *obra um* e na *obra dois*, respetivamente, «retângulos e quadrados inclinados», atendendo essencialmente à medida dos lados das figuras geométricas (figura 6).

A relação das figuras geométricas com a amplitude dos ângulos parece inexistente, pois admitiram quadrados com lados inclinados e com ângulos agudos e obtusos ou com os lados dobrados. Embora tivessem distinguido triângulos isósceles de escalenos e descrito, em resultado dos arranjos dos desenhos (Veloso, 2012), octógonos, círculos, um decágono e três cubos em perspetiva, o silêncio quanto aos ângulos presume uma conceção errónea de conceitos, fragilizando a perceção das figuras e das transformações geométricas (figuras 7 e 8).

Questionados os alunos sobre a existência duma relação entre as obras ou duma faceta que lhes fosse comum, responderam que tal relação passava pela repetição harmoniosa duma figura geométrica sobre a rigidez dum mesmo esquema criativo. Foi o que os alunos tentaram repetir, quando afirmaram que as obras desenhavam «figuras paralelas»:

Diogo (acerca da obra três): — As figuras são paralelas, porque dá para cortar a imagem completa em quatro partes iguais. A figura é sempre a mesma… Só anda à roda.

A ideia de transformação geométrica surge no «anda à roda» (rotação) e nas «figuras paralelas» (translação), apesar das dificuldades manifestadas pelos alunos na leitura das obras do artista, confundindo ideias geométricas fundamentais para a compreensão do universo espacial.

Geometria Invisível. Na *geometria invisível* analisa-se as respostas dos alunos à geometria que não preenche, mas orienta a ocupação visível do espaço. Os alunos exploram a forma como os objetos visíveis posicionam-se no plano e, em relação a si mesmos, identificam e descrevem as isometrias implícitas nas obras, suportadas pelos arranjos dos objetos.

Obra Um. O Hélder e a Vanda, devido à forma e ao aparente arranjo em espelho dos dois octógonos, depressa julgaram o segundo octógono como a imagem duma reflexão do plano. Contudo, muitos foram os alunos que não demoraram, também, a corrigi-los:

Catarina: — Não há reflexão, porque os octógonos estão ao contrário. Mas, há uma rotação… O [primeiro] octógono pode dar uma volta de 180° e ficar igual ao outro (figura 9).

Tiago: — Sim. Mas, a seguir, temos de fazer uma translação [do octógono], para ficarem [ambos] na mesma posição…

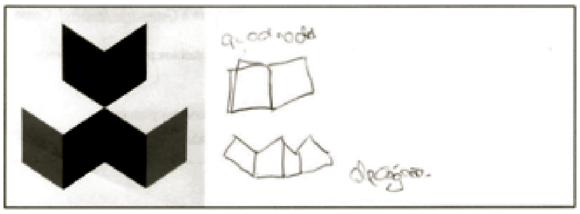

Figura 8.—Registos do Hélder [Decágono] e do David [Cubo]

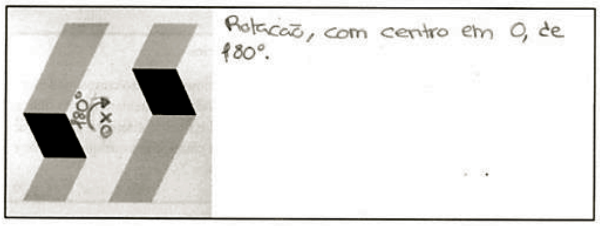

Figura 9.—Registo da Catarina [Rotação]

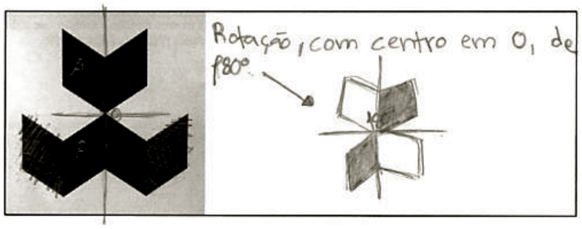

Figura 10.—Registos da Catarina [Rotação]

Catarina: — Não é preciso... [Os octógonos] ficam, logo, iguais.

Tiago: — Ficam iguais, mas temos de os juntar, não?

Catarina: — Já não estou a perceber nada...

Professor: — Esperem... Onde é que marcaste o centro da rotação, Catarina?

Catarina: — No meio!

Professor: — No meio do quê?

Catarina: — No meio da pintura toda...

A obra apresenta uma simetria de meia-volta (Veloso, 2012). Porém, nem todos os alunos reconheceram a isometria. Tal como o Tiago, outros referiram que o segundo octógono resultava duma rotação seguida duma translação do primeiro octógono. A maioria dos alunos isolou o primeiro octógono e tentou transformá-lo no segundo, porque era, como referiram, «mais fácil», refletindo a ilusão do arrasto das figuras geométricas.

Obra Dois. Assumindo o esquema criativo da *obra um*, o Tiago disse que a *obra dois* desenhava, à volta dum «eixo», uma mesma simetria de rotação. Contudo, não só não falamos de «eixo», mas de centro de rotação, como a *obra dois* é a única que não apresenta qualquer simetria de rotação, para além da rotação de 360°. Se bem que os losangos pretos e azuis coincidam, como identificou a Catarina (figura 10), ao fim da rotação de 180°, os vermelhos (em baixo, nos extremos esquerdo e direito) restringem-se à de 360°.

Os alunos dispararam numa outra direção:

Diogo: — Dá para fazer uma reflexão da pintura toda com um eixo vertical.

Professor: — Dá? Já fizeste com o papel vegetal?

Diogo: — Sim...

Carlos C.: — Fica igual... O Diogo tem razão.

Hélder: — Não fica não! As cores dos quadrados [que são realmente losangos] do meio não são iguais... Só os vermelhos é que são.

Diogo: — Pois é... O azul fica em cima do preto.

Carlos C.: — Está bem... Mas o que *conta* são as formas, não são as cores...

Não atribuindo relevância às cores, alguns referiram a existência de uma simetria de reflexão de eixo vertical, o que revela alguma compreensão do espaço e da própria transformação geométrica (Harris, 2000).

Obra Três. Os alunos demostraram menos dificuldades na análise da *obra três* por considerarem, como tinha sugerido o Diogo, um esquema criativo em rotação, em que a figura «anda à roda». No entanto, a análise da mesma não ficou por aí:

Diogo: — A pintura tem uma rotação de 90°... O motivo roda 90° à volta do quadrado (figura 11).

Daniel: — Então, [a pintura] tem quatro *rotações de 90°*. O motivo não roda só uma vez, roda quatro vezes.

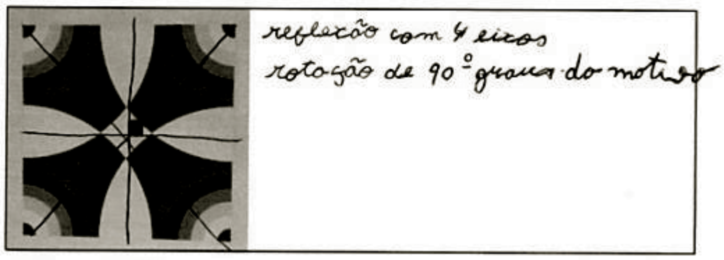

Figura 11.—Registos do Diogo [Reflexão e Rotação]

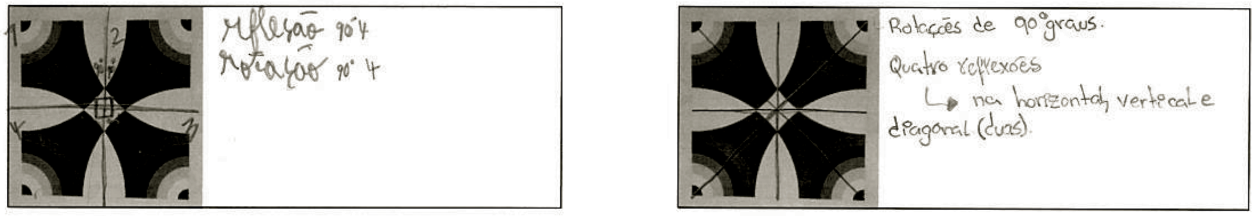

Figura 12.—Registos do Carlos G. e da Inês [Reflexão e Rotação]

Professor: — Exato! O motivo começa por rodar 90°… Mas, depois, roda mais 90°, que dá…

Daniel: — 180°.

Professor: — Sim, dá meia-volta. Roda outros 90° e a amplitude da rotação chega aos…

Daniel: — 270° e a quarta rotação fica com 360°. [O motivo] dá uma volta inteira.

Professor: — O motivo volta, assim, ao ponto inicial…

Carlos G.: — Mas, professor… A pintura, também, tem quatro *reflexões de 90°*.

Sublinhando a afirmação do Carlos G., que embora tenha traçado dois eixos de reflexão, está patente um conhecimento insuficiente ou aparente das transformações, ao misturar ideias próprias da rotação e da reflexão. Além disso, o Carlos G. observou, apenas, simetrias de eixo vertical e horizontal, parecendo existir uma certa dificuldade em identificar eixos diagonais, assinalados pela Inês (Figura 12).

Obra Quatro. A maioria dos alunos descreveu quatro simetrias de reflexão e, «pelo círculo pequeno do meio», outras tantas de rotação (figura 13).

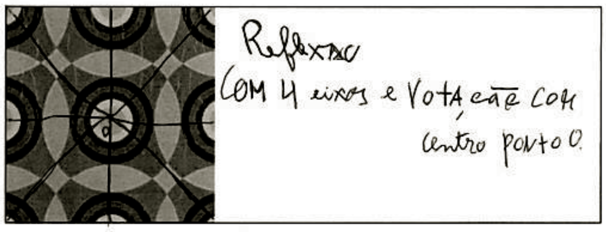

Figura 13.—Registos do Carlos C. [Reflexão e Rotação]

As rotações centradas em qualquer um dos «quadrados dobrados», como os chamaram os alunos, não foram exemplificadas. Alunos como o David e a Cheila mostraram que os «quadrados dobrados», bem como qualquer outro não polígono desenhado, sobrepunham-se através de translações (figura 14).

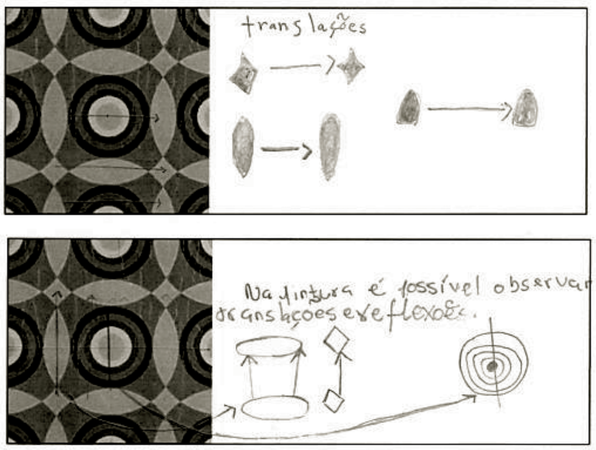

Figura 14.—Registos do David [Translação] e da Cheila [Translação e Reflexão]

Obra Cinco. A maioria dos alunos apontou quatro simetrias de rotação e de reflexão, no entanto, embora existam as quatro rotações, não existe qualquer simetria de reflexão, considerando o efeito cromático das cores. Revelaram alguma dificuldade em prever a sobreposição das figuras:

Hélder: — Há uma reflexão no eixo da diagonal… Os triângulos são iguais.

Andreia: — Só que as cores [dos triângulos] não são…

Hélder: — Na diagonal [as cores] ficam iguais…

Andreia: — Não ficam nada… Dá para ver pelos triângulos vermelhos e azuis… Os azuis ficam em cima dos vermelhos.

Hélder: — Mas, só esses… Os outros [triângulos] ficam todos iguais…

Professor: — Ficam? Achas, por exemplo, que os triângulos amarelos, ou a laranja, ficam iguais?

Hélder: — Sim!

Andreia: — Não! Nenhum fica…

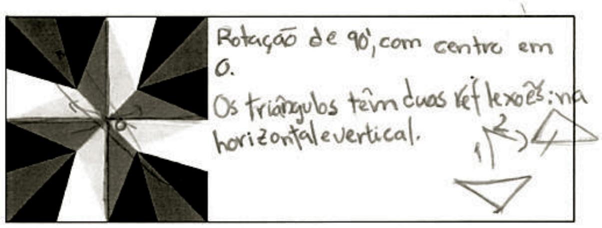

Figura 15.—Registos da Catarina [Rotação e Reflexão]

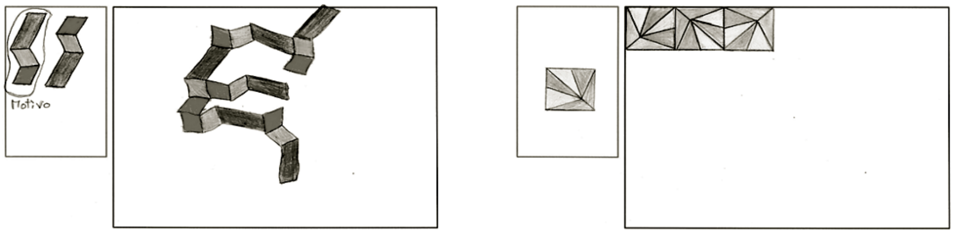

Figura 16.—Desenhos da Andreia [obra um] e da Catarina [obra cinco]

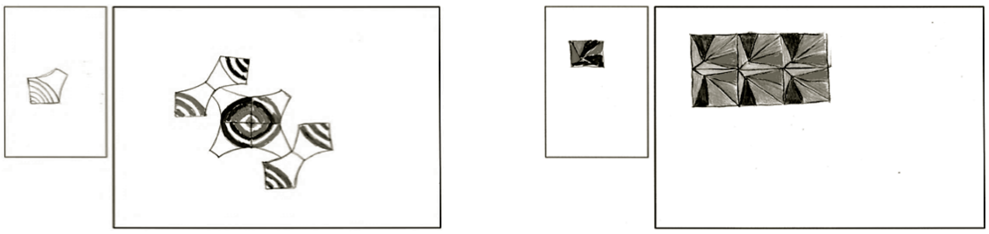

Figura 17.—Desenhos da Carolina [Rotação] e da Cheila [Translação]

Neste desacordo, que atesta a dificuldade na compreensão da posição dos objetos relativa a eixos de reflexão diagonais (Alves & Gomes, 2011), o Alexandre notou que os pares de triângulos geometricamente iguais trocavam de lugar, isto é, que, ao refletir o plano, cada triângulo mudava de posição com o seu par, pois onde devia ficar o triângulo azul fica o vermelho e onde devia estar o vermelho está o triângulo azul. Tal constatação levou a Catarina a uma outra descoberta:

Catarina: — Já sei! Fazemos duas reflexões…

Professor: — Duas reflexões?

Catarina: — Sim, porque… Como os triângulos [iguais] ficam trocados, dá para ficarem no lugar certo, se fizermos outra reflexão (figura 15).

Na impossibilidade de os fazer coincidir numa reflexão do plano, a Catarina demonstrou que os triângulos se sobrepunham na composição de duas reflexões, o que supõe experiência na visualização da transformação geométrica e sugere compreensão das dinâmicas de transformação do plano. Só a composição de duas reflexões é capaz de alterar a posição e inverter, uma e outra vez, a orientação dos objetos (Harris, 2000; Veloso, 2012).

Geometria dos alunos. Na realização do pensamento imaginativo, os alunos tentam representar algo de novo, refazendo as obras de modo criativo. Na *geometria dos alunos*, analisa-se as suas produções e a compreensão das isometrias, ou seja, se conseguem redesenhar as composições do pintor, reconstruindo novas abordagens na ocupação do espaço. Sobre os desenhos dos alunos sublinhamos o facto de terem optado, na sua grande maioria, pela reconstrução da *obra um* e da *obra cinco*, cujos motivos desenham figuras simples e com as quais conseguiriam concretizar as isometrias inseridas num esquema criativo.

A maioria dos alunos repetiu os motivos despreocupada em obedecer a uma qualquer simetria, porém consciente do aspeto global dos desenhos. Relativamente ao exemplo da Andreia (figura 16), há uma tentativa de *harmonia* na repetição dos motivos e uma intenção em construir uma figura, mais ou menos, equilibrada. No exemplo da Catarina (figura 16), constituindo um friso, existe uma compreensão da isometria, pois executa as sucessivas rotações de 90° do motivo da *obra cinco*.

Nos poucos desenhos que respeitaram um esquema simétrico, contam-se simetrias de rotação, sem considerar as diferenças cromáticas, e simetrias de translação (figura 17).

A *obra dois*, escolhida por três alunos, revelou uma maior inconsistência na recriação de isometrias, com exceção do Daniel, que apresenta três motivos em rotação (figura 18).

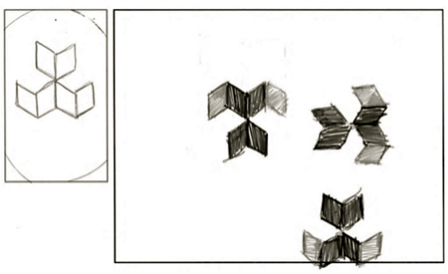

Figura 18.—Desenho do Daniel [Rotação]

O desenvolvimento do raciocínio geométrico e espacial dos alunos depende do tipo de experiências educativas (Breda *et al.*, 2012; Gomes, 2012). Neste sentido, o estudo realizado aponta para um conhecimento geométrico dos alunos muito centrado na perceção visual em detrimento da compreensão das propriedades matemáticas das figuras e das transformações geométricas, denotando um ensino da geometria baseado na representação figurativa sem conexão com as respetivas propriedades matemáticas, uma vez que os alunos chegaram a referir quadrados, em que os ângulos não eram retos, ou a traçar dois eixos de reflexão perpendiculares, designando-os erradamente como reflexões com ângulos de 90°. A identificação, interpretação e representação de transformações geométricas, através da manipulação da perceção física de um objeto e da operação com imagens (Rodrigues, 2011), permitiu que os alunos raciocinassem sobre as relações entre os objetos geométricos, de modo a explicar e resolver o problema com o qual se debateram, seguindo a sua própria compreensão geométrica das figuras e das transformações.

Considerações finais

Numa realidade que se pede um professor cada vez mais crítico, criativo, com um especial tato pedagógico e um sentido empreendedor único (Ponte, 1999), o estudo investigativo contribui para o cultivo de uma atitude interventiva e buscou tirar partido das muitas potencialidades de um ensino das transformações geométricas através da arte: uma interação benéfica entre o pensar, o sentir e o agir, que amplia as possibilidades de conhecimento dos alunos.

Analisando os esquemas criativos apresentados, os alunos conseguiram visualizar definições e conceitos geométricos. Os alunos demonstraram, inicialmente, um sentido espacial e geométrico mascarado por um acumular de significados e de fórmulas geométricas, prontas a serem usadas. Ao encararem as tarefas matemáticas propostas como problemas, os alunos testaram hipóteses e explicaram a forma como compreenderam a sua resolução. Os alunos começaram por tentar sobrepor cada figura, fazendo coincidir os objetos presentes nas obras com deslocamentos isolados, e terminaram a olhar para as obras como um todo.

Referências Bibliográficas

Alves, C. & Gomes, A. (2011). Uma avaliação diagnóstica sobre a perceção de relações espaciais. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 345–358). Lisboa: APM.

Bastos, R. (2006). Notas sobre o ensino da geometria: simetrias. *Educação e Matemática*. N.° 88, 9–11.

Breda, A., Serrazina, L., Menezes, L., Sousa, H. & Oliveira, P. (2011). *Geometria e medida no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXIII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 233–244). Lisboa: APM.

Grimes, W. (2010). Nassos Daphnis, an artist of geometry, dies at 96. *New York Times*. Acedido de [http://www.nytimes.com/2010/12/13/arts/design/ 13daphnis.html] a [24/09/2014].

Harris, A. (2000). *Symmetry*. London: University of Cumbria.

Palhares, P. (2004). *Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico*. Porto: Edições LIDEL.

Ponte, J. (1999). Didáticas específicas e construção do conhecimento profissional. *In* Tavares, J., Pereira, A., Pedro, A. & Sá, H. (Orgs.). *Atas do IV congresso da sociedade portuguesa de ciências da educação* (Vol. I, pp. 59–72). Porto: SPCE

Rodrigues, M. (2011). Ensino e aprendizagem da geometria. *In* Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.). *Atas do XXII seminário de investigação em educação matemática* (pp. 339–344). Lisboa: APM.

Tavares, G. (2013). *Atlas do corpo e da imaginação*. Lisboa: Editorial Caminho.

Veloso, E. (2012). *Simetrias e transformações geométricas*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Diogo Batista, António Guerreiro e António Lopes
Escola Superior de Educação e Comunicação,
Universidade do Algarve