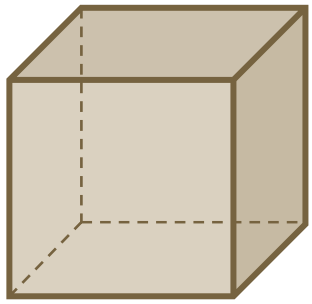
Um cubo e muitos triângulos

Quantos triângulos retângulos se podem obter escolhendo três vértices de um cubo?

Pergunta adicional: Se escolhermos ao acaso três vértices de um cubo, qual é a probabilidade de eles formarem um triângulo retângulo?

(Respostas até 5 de Abril, para zepaulo46@gmail.com)



DESISTÊNCIAS NO TORNEIO

O problema proposto no número 129 de *Educação e Matemática* é uma variante de um outro, que nos foi proposto por Delfim Guedes (V. N. Gaia):

Com a finalidade de treinar os alunos para o Campeonato Nacional de Jogos Matemáticos, o professor desafiou a sua turma para se juntarem num sábado e fazerem um torneio de Hex, em que cada um jogaria com todos os outros.

Infelizmente, à última hora, alguns alunos tiveram de desistir e, por este motivo, disputaram-se menos 94 jogos do que os previstos inicialmente.

Quantos alunos tinha a turma e quantos desistiram?

Recebemos 12 respostas, enviadas por

Alberto Canelas (Queluz),
Carlos Dias, Catarina Ferreira (Viseu),
Francisco de Matos Branco (Ovar),
Graça Braga da Cruz (Ovar),
Hugo Silva (Lisboa),
Luís Lopo, Manuel Marques & Lucas Marques (Lagos),
Mário Roque (Guimarães),
Pedrosa Santos (Caldas da Rainha),
Telma Carneiro (Santo Tirso)

e de um grupo de quatro professores de Paião:

Dora Gaspar, Lurdes Laranjeiro, Regina Veríssimo e Pedro Alberto.

O *Hugo* começa com estas considerações:

Este problema é bastante conhecido e tem várias variantes. Uma poderá ser determinar quantos apertos de mão são dados por um conjunto de pessoas; outra o número de segmentos de reta que unem as arestas numa figura geométrica plana. Aqui trata-se o problema de quantos jogos existem num grupo de N alunos. Para determinar o número de jogos feitos por N alunos, podemos tratar este problema como um problema de combinatória (...).

Sendo então:
n = número de alunos da turma
d = número de desistentes
temos que:

— o número de jogos que seriam realizados com todos os alunos da turma é dado por

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2},$$

— o número de jogos realizados com os alunos que não desistiram é dado por

$$C_2^{n-d} = \frac{(n-d)(n-d-1)}{2}.$$

Como não se disputaram 94 jogos, sabemos que:

$$C_2^n - C_2^{n-d} = 94 \quad \text{(Equação 1)}$$

Praticamente todas as resoluções partiram desta equação mas, a partir daqui, as abordagens e os percursos divergem.

A *Catarina* simplifica a Eq. 1 obtendo

$$d^2 + (1-2n)d + 188 = 0.$$

O descriminante desta equação de segundo grau é

$$\Delta = (1-2n)^2 - 752$$

e tem de ser um quadrado perfeito. Numa folha de cálculo e até $n = 40$, isso só acontece para $\Delta = 1849 = 43^2$.

Vem $n = -25$ ou $n = 26$.

Logo, a turma tinha 26 alunos e faltaram 4.

O *quarteto de Paião* parte da Eq. 1 para chegar a

$$n = \frac{94}{d} + \frac{d+1}{2}.$$

Substituindo d por números naturais, só se obtêm valores inteiros de n para:

$d = 1$ e vem $n = 95$ (turma muito grande),

$d = 4$ e vem $n = 26$ (solução)

Manuel & Lucas também obtêm

$$n = \frac{94}{d} + \frac{d+1}{2}.$$

d tem de ser 1, 2, 4, 47 ou 94. Não pode ser 1 porque «alguns alunos tiveram de desistir» (e nenhum professor merece ter uma turma com 95 alunos). Não pode ser 2 nem 94 porque obter-se-ia um valor de n que não seria inteiro (e nenhum professor merece ter meio aluno). Não pode ser 47 porque obtém-se um valor de n inferior a 47, o que não faz sentido. Para $d = 4$, obtém-se $n = 26$.

Também o *Francisco* chegou às mesmas equação e conclusões. O *Carlos* e o *Alberto* obtiveram a equação $(n+d-1)(n-d) = 188$ Como $188 = 2 \times 2 \times 47$, terá de ser:

$$n - d = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 4$$
$$n + d - 1 = 188 \text{ ou } 94 \text{ ou } 47$$

Resolvendo estes três sistemas, só o terceiro dá soluções inteiras: $d = 4$ e $n = 26$.

A *Graça* avança até

$$d(d+2k-1) = 188 \Leftrightarrow d(d+2k-1) = 2^2 \times 47,$$

em que k é o número de alunos que participaram no torneio. O resultado final é $d = 4 \Rightarrow k = 22$ e $d + k = 26$.

O *Hugo* e o *Mário* seguiram uma estratégia diferente. Numa folha de cálculo criaram uma coluna para os valores de C_2^n e outra para os de $C_2^n - 94$, procurando valores que aparecessem nas duas colunas.

Diz o Mário: *A 1ª solução que encontrei é plausível:*

$$C_2^{26} = 325 \text{ e } C_2^{22} = 231 = 325 - 94$$

A turma teria então 26 alunos, tendo 4 desistido do torneio. Por curiosidade procurei mais soluções ... para a frente. Encontrei outra, fora do contexto: $C_2^{94} = 4371 = C_2^{95} - 94$.