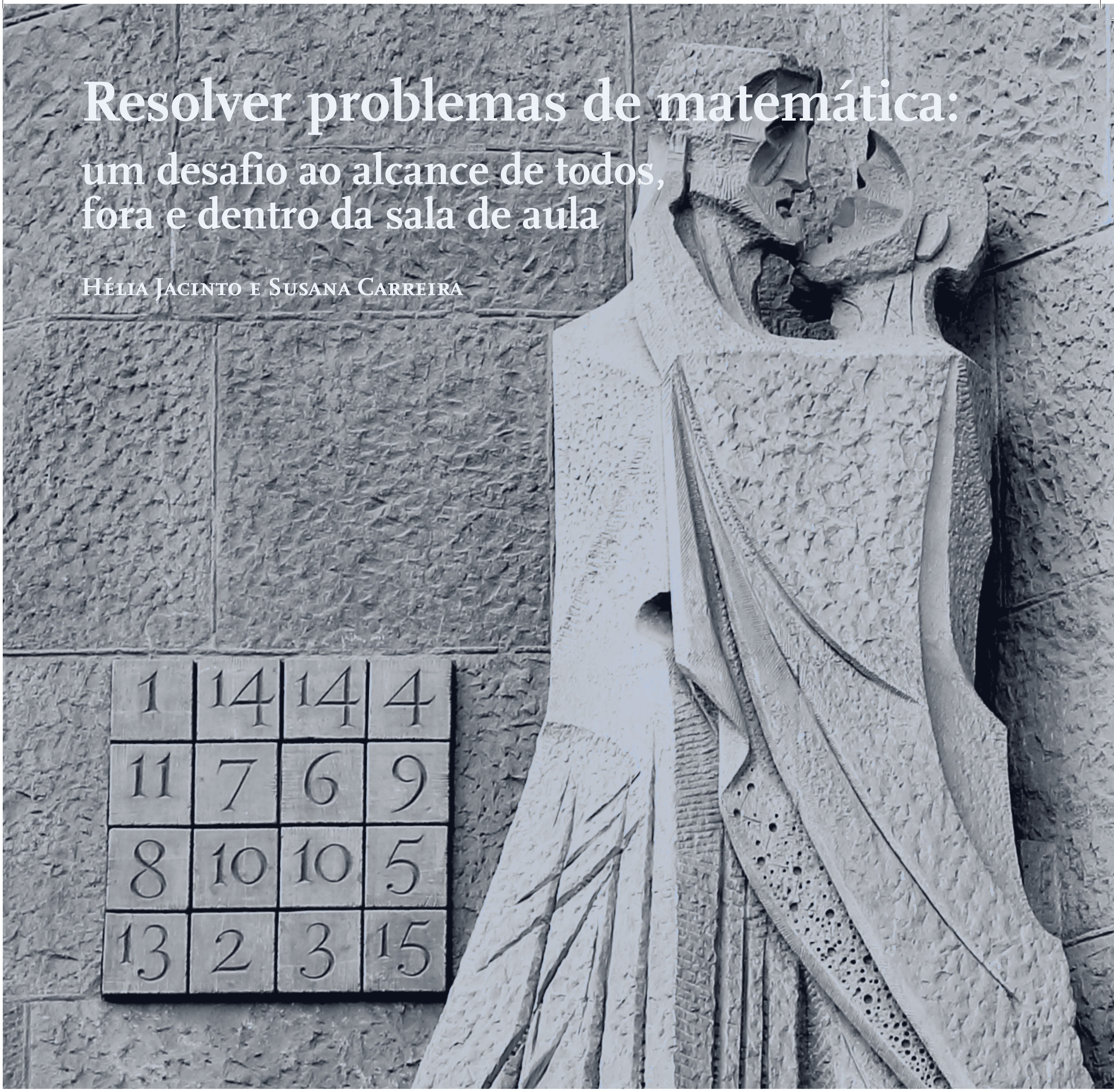
Resolver problemas de matemática:
um desafio ao alcance de todos, fora e dentro da sala de aula

Hélia Jacinto e Susana Carreira



Nas últimas décadas do século XX ganhou vida um amplo debate sobre a *resolução de problemas* de matemática reconhecendo-se a utilidade dessa capacidade básica para fazer face aos desafios do dia a dia e, em paralelo, a sua importância no desenvolvimento de aprendizagens matemáticas significativas. A par desse debate, escolas e professores começaram a investir em projetos extracurriculares relacionados com a resolução de problemas de matemática com o objetivo de complementar o trabalho de sala de aula. São hoje exemplos o *Problema do Mês*, o *Canguru Matemático Sem Fronteiras* ou as *Olimpíadas Portuguesas da Matemática*. Algumas destas iniciativas têm um forte cunho competitivo e destinam-se a alunos particularmente talentosos, mas outras — de que o Sub12 e o Sub14[1] são exemplo — assumem uma natureza mais inclusiva o que possibilita a participação de alunos com diversos graus de aptidão para a resolução de problemas (Carreira et al., 2012).

As Competições Matemáticas Sub12 e Sub14

Estas Competições são organizadas pelo Departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve desde 2005 e destinam-se a jovens do Algarve e do Alentejo que frequentem o 5.º ou o 6.º ano — no caso do Sub12, e o 7.º ou 8.º ano — no caso do Sub14. Funcionando de modo idêntico, o Sub12 e o Sub14 estão organizados em duas fases. Entre janeiro e junho decorre a *fase de apuramento*, durante a qual são disponibilizados *online* dez problemas, um por quinzena. Os concorrentes acedem ao enunciado e dispõem de duas semanas para encontrar a solução e enviar a sua resolução em formato eletrónico. A resposta a cada problema só é considerada válida mediante apresentação de uma explicação detalhada da estratégia usada e de uma justificação do raciocínio. A organização devolve uma apreciação do trabalho de cada concorrente, o que pode conter pistas que ajudem a corrigir ou a completar a resolução. É permitido que revejam a solução dentro do prazo estipulado e é também possível solicitar ajuda a professores, colegas, familiares, ou mesmo à organização, a fim de ultrapassar eventuais dificuldades. Ao longo da edição, a organização divulga listas com o desempenho dos concorrentes bem como uma seleção de resoluções que ilustrem diferentes estratégias, revelem criatividade ou o uso oportuno de uma determinada ferramenta tecnológica — as *resoluções admiráveis*. Estas são as particularidades dos Subs que sustentam a sua faceta inclusiva e que permitem manter estes jovens, com diferentes aptidões para a matemática, focados na resolução de problemas desafiadores durante um período de tempo relativamente longo. Os concorrentes que resolvam corretamente oito dos dez problemas propostos são apurados para a *fase final* que consiste na resolução de cinco problemas, com papel e lápis, no campus da Universidade do Algarve. Aqui se desenrola a verdadeira competição, dado que os concorrentes resolvem os problemas individualmente e num período de tempo limitado (Amado & Carreira, 2012).

Os Campeonatos de Matemática Sub12 e Sub14 foram o foco do projeto de investigação Problem@Web,[2] na área da Educação Matemática, onde se procurava compreender as estratégias de resolução usadas pelos concorrentes, o uso de ferramentas tecnológicas, as formas de expressão do pensamento matemático, e ainda a sua criatividade matemática. Com base em dados recolhidos no âmbito deste projeto, debruçamo-nos sobre a natureza da resolução de problemas de matemática que decorre para além da sala de aula num ambiente permeado pelas mais diversas tecnologias. Descrevemos ainda como alguns professores acompanham os seus alunos nas Competições e incorporam esta resolução de problemas nas suas aulas de matemática.

Em que é que esta resolução de problemas de matemática é diferente?

Os *problemas não-rotineiros* propostos nas Competições visam estimular intelectualmente os concorrentes supondo-se, à partida, que não dispõem de um procedimento que lhes dê garantia imediata de encontrar a solução. Os desafios não são alinhados com o currículo pelo que esta resolução de problemas envolve o recurso a uma matemática e a um pensamento matemático que não são necessariamente impelidos pelos conhecimentos matemáticos escolares, ou seja, os concorrentes *desenvolvem formas produtivas de pensar* acerca de cada situação, utilizando conhecimentos informais e incorporando elementos descritivos da sua abordagem.

Nestas Competições respeitam-se as preferências e as experiências de cada concorrente e *reconhece-se a sua validade* enquanto elementos estruturantes da capacidade de resolver problemas. Esta liberdade espelha-se na diversidade de soluções submetidas quer em termos das abordagens, estratégias ou representações matemáticas, quer em termos das ferramentas usadas. Na verdade, o recurso às tecnologias surge com dois propósitos: comunicar a solução encontrada — o que inclui necessariamente um relato do processo seguido; ou suportar o desenvolvimento e a implementação de uma estratégia que conduza à solução — e neste caso, o ficheiro também incorpora essa sequência de passos.

Ao longo de sucessivas edições tem ficado patente que a fase de resolução de um problema está intrinsecamente ligada à fase de elaboração da resposta. Não sendo sempre possível distingui-las como duas fases distintas ou bem delimitadas, sobretudo quando o uso de tecnologias apoia o desenvolvimento de pensamento matemático, é oportuno considerar a *expressão do pensamento* como *parte integrante da resolução de problemas*. Aliás, os concorrentes fazem uma seleção ponderada dos programas que permitem implementar uma determinada abordagem ou resolver um certo tipo de problemas de forma que o ficheiro resultante sirva de veículo de exposição do raciocínio seguido.

Nos Subs, resolver um problema não se resume à apresentação dos cálculos e da solução. Em complemento, importa incluir descrições e explicações detalhadas dos processos, donde que as ilustrações, os esquemas, a utilização de cores ou legendas permitem traçar um roteiro do pensamento matemático desenvolvido até obter a solução.

A tinta que sobrou

A Miriam gosta de dedicar o tempo livre a fazer decorações em sua casa. Recentemente, pôs as mãos à obra e decidiu pintar o seu escritório.

Na hora de arrumar tudo, já muito satisfeita com o trabalho concluído, verificou que tinham sobrado duas latas, cada uma cheia até um quarto de altura. Resolveu juntar o conteúdo das duas latas numa lata mais pequena, com metade do diâmetro das outras duas e com a mesma altura. Achou que nessa lata mais pequena caberia exactamente o conteudo das outras duas.

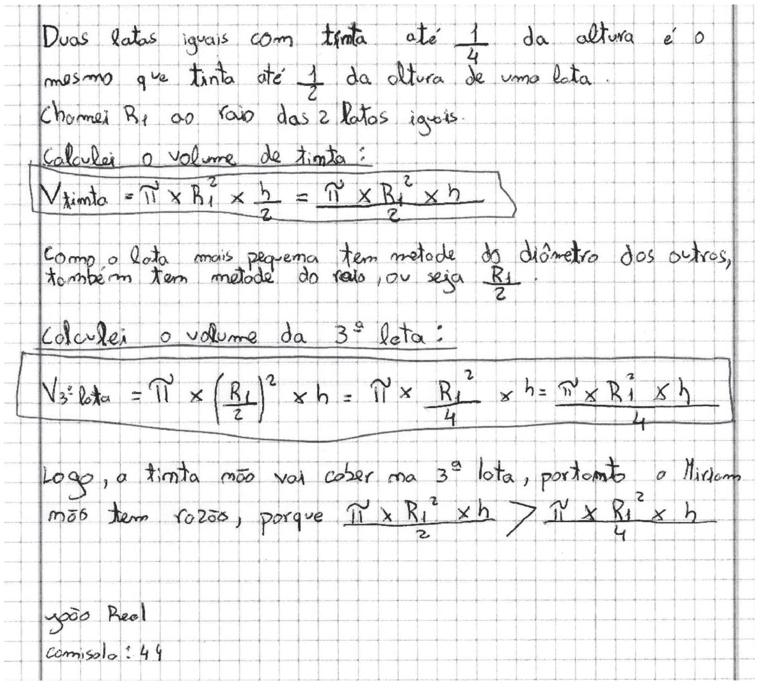
$$V_{cilindro} = \text{Área base} \times h$$

$$\text{Área base} = \pi r^2$$

Será que tem razão?

Não te esqueças de explicar o teu processo de resolução.

Figura 1—Enunciado do problema 2 da edição 2011/2012 do Sub14



Duas latas iguais com tinta até $\frac{1}{4}$ da altura é o mesmo que tinta até $\frac{1}{2}$ da altura de uma lata.
Chamei R_1 ao raio das 2 latas iguais.
Calculei o volume de tinta:

$$\boxed{V_{tinta} = \pi \times R_1^2 \times \frac{h}{2} = \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{2}}$$

Como a lata mais pequena tem metade do diâmetro dos outros, também tem metade do raio, ou seja $\frac{R_1}{2}$.
Calculei o volume da 3ª lata:

$$\boxed{V_{3^a\,lata} = \pi \times \left(\frac{R_1}{2}\right)^2 \times h = \pi \times \frac{R_1^2}{4} \times h = \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{4}}$$

Logo, a tinta não vai caber na 3ª lata, portanto a Miriam não tem razão, porque $\frac{\pi \times R_1^2 \times h}{2} > \frac{\pi \times R_1^2 \times h}{4}$

João Real
Comissolo: 44

Figura 2.—Resolução digitalizada enviada pelo concorrente A1

Descrições, explicações e construções não são simplesmente processos que os alunos usam a caminho de produzir 'a resposta' e não são simplesmente pós-scripts que os alunos apresentam após 'a resposta' ter sido produzida. Estes SÃO os componentes mais importantes que são necessários nas respostas. (Lesh & Doerr, 2003, p. 3)

Resolver problemas no âmbito do Sub12 e do Sub14 é encontrar formas produtivas de pensar sobre as situações desafiadoras propostas e desenvolver modos de resolver e exprimir o próprio pensamento, na combinação de conhecimentos matemáticos escolares e conhecimentos informais. Nesse processo, os jovens desenvolvem as suas próprias estratégias e incorporam elementos mediados pelas tecnologias que usam, o que pode ser interpretado como um discurso matemático digital.

Um problema, três modos de resolver-e-exprimir

Na fase de apuramento das Competições, que se desenrola a distância, as soluções têm que ser submetidas eletronicamente e, portanto, são *digitais*. Todavia, muitas são inicialmente produzidas por meios convencionais, como o papel e lápis, e são posteriormente digitalizadas. Estes formatos surgem, sobretudo, quando os concorrentes enveredam por estratégias que incluem manipulação simbólica, o que é difícil de reproduzir quer no corpo de um *e-mail*, quer nos programas usuais.

É o caso da solução que o concorrente A1 apresentou para o problema *A tinta que sobrou* (Figura 1). O jovem começou por notar que se cada uma das latas maiores contém tinta até 1/4 da sua capacidade, ao juntar essa tinta numa única lata idêntica obter-se-á metade do volume da lata (Figura 2). Designou adequadamente os raios dos dois tipos de lata e determinou uma expressão para o volume de tinta em cada uma delas, considerando que o raio da base da lata mais pequena é metade do raio da lata maior. Finalmente, comparou as duas expressões e concluiu que o volume de tinta que sobrou é superior à capacidade da lata pequena.

Neste trabalho, em que a tecnologia não adquire um papel de relevo no desenvolvimento da estratégia, está patente um *discurso expositivo* que caracteriza esta resolução de problemas: o jovem fez uma narrativa do processo seguido, apresentando as convenções que usará adiante, intercalando explicações textuais com a manipulação algébrica para deduzir expressões que representem o volume de tinta que sobrou e a capacidade da lata pequena. Destacou

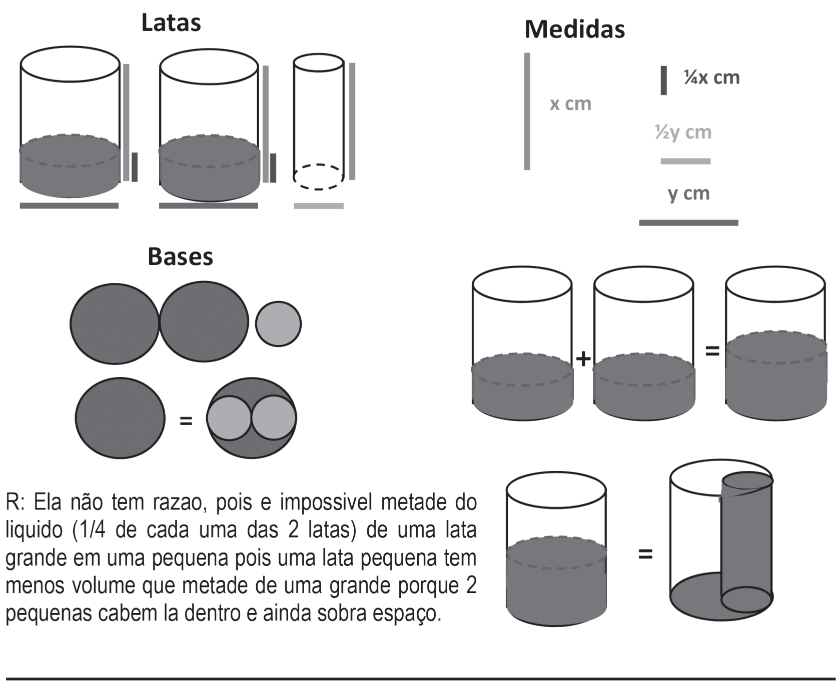


Figura 3.—Excertos da resolução elaborada em PowerPoint pelo concorrente A2

dois passos intermédios ao sublinhar a vermelho a descrição do processo e ao desenhar caixas vermelhas ao redor dessas expressões.

O concorrente A2, por sua vez, submeteu uma resolução elaborada em *PowerPoint* (Figura 3) onde se pode identificar um tipo de discurso expositivo, marcado pela sequência de representações da situação muito próximas do contexto do problema, que pode ser considerado um *discurso matemático digital* dada a relevância que a ferramenta tecnológica assume. As primeiras representações sintetizam as informações contidas no enunciado e incluem uma legenda onde se associam os segmentos coloridos às dimensões das latas, valores estes que são desconhecidos.

O problema é *desvendado* quando o jovem representa a base de uma lata grande e ao sobrepor-lhe duas bases pequenas constata que não cobrem na íntegra o círculo maior. Esta constatação *bidimensional*, que parte da análise e comparação da área das bases das latas, é expandida para uma representação *tridimensional* da situação que suporta a comparação dos volumes de tinta nos cilindros. Verifica então que, para uma mesma altura, «uma lata pequena tem menos volume que metade de uma lata grande» pois ao colocar duas latas pequenas no interior de uma lata grande, «ainda sobra espaço».

As ilustrações e os esquemas utilizados favoreceram o *desenvolvimento de uma forma produtiva de pensar sobre a situação* que congrega saberes informais e conhecimentos matemáticos escolares. Estas representações, a utilização da cor e as legendas suportam o pensamento matemático pois permitem uma manipulação virtual da situação. Todavia, e apesar do relato visual ser bastante claro e revelador do modelo da situação que o concorrente desenvolveu (comparação da área das bases, desprezando as suas alturas por serem iguais e inferindo sobre os volumes em questão), houve a necessidade de incluir uma explicação textual que resume a sua conclusão. Esta resolução ilustra o poder das ferramentas tecnológicas em transformar um problema numa situação manipulável, compreensível e resolúvel, mas revela sobretudo que *resolver e exprimir* essa solução são duas facetas da mesma atividade.

Já as concorrentes A3 e A4 enviaram um ficheiro produzido no Excel e incluíram uma descrição dos seus processos no corpo do *e-mail* (Figura 4). O ficheiro permite fazer um teste mediante a introdução de valores em células

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Cálculo do volume da tinta					Cálculo do volume da lata pequena			
2	Raio	Altura	Total			Raio	Altura	Total	
3	4	5	251,2			2	10	125,6	
4									

Resposta:

Eu e a minha colega utilizamos uma técnica em excel, que dá para calcular várias coisas.
Primeiro cálculamos o volume da tinha conjunta das duas latas grandes. Indicámos o raio, a altura, utilizamos a técnica e no total incide o volume da tinta.
Fizemos o mesmo para o volume da lata pequena.
Resposta: Não é possivel a tinta das duas latas grandes caber na lata pequena, porque o volume da tinta é duas vezes maior que o volume da lata, no qual deveria ser ao contrário.

Figura 4 — Resolução enviada elaborada em Excel pelas concorrentes A3 e A4 e explicação do processo

chave. À esquerda, é possível determinar o volume de tinta que sobrou mediante a introdução de um valor para o raio da base do cilindro e outro para a altura de tinta que se queira considerar. A célula C3, que contém a fórmula «= 3,14*A3∧2*B3», devolve o volume total de tinta nessa lata. À direita, calcula-se o volume da lata pequena considerando que o seu raio é metade do raio da lata maior e que a sua altura é o dobro da altura que a tinta que sobrou atinge numa lata grande, e o resultado surge na célula H3. Ao inserir vários casos, todos eles respeitando as condições iniciais, é possível verificar que «o volume da tinta é duas vezes maior que o volume da lata» pequena.

Esta estratégia encerra outra visão do mesmo problema, igualmente produtiva. Com o auxílio de uma folha de cálculo as concorrentes conseguem rapidamente simular um conjunto de experiências e, analisando os resultados obtidos, conjeturar que o volume da lata pequena é metade do volume de tinta que sobra, embora não o provem matematicamente. Completaram o modelo criado no Excel com uma breve descrição textual em que explicam a sequência de passos e respondem à questão colocada, o que vai ao encontro da ideia de que este *discurso expositivo*, composto pelo ficheiro e pela explicação, é parte integrante da resolução do problema. A folha de cálculo permitiu que as concorrentes desenvolvessem um modelo informal marcado pela *expressividade representacional* que a ferramenta permite e pela introdução de expressões que apontam para o contexto para explicitar o sentido que atribuíram aos valores representados.

Para um mesmo problema, três resoluções, três estratégias, três ferramentas, três modos de pensar a que correspondem três modelos eficazes, e que estas Competições acolhem. É a qualidade das descrições do pensamento matemático — isto é, a combinação de representações (mediadas pelo papel e lápis, *PowerPoint* ou *Excel*) com descrições mais ou menos detalhadas do processo de resolução — que permite exteriorizar as formas como estes jovens estão a interpretar o problema e como desenvolvem as suas próprias maneiras de encontrar a solução. Constroem formas de resolver e exprimir a solução que, além de estarem intimamente ligadas às ferramentas que escolhem usar, estão também muito centradas nas suas potencialidades representacionais: visuais no caso do *PowerPoint*; ou de cálculo relacional, no caso do *Excel*.

Os jovens participantes nas Competições exibem uma grande destreza na utilização de ferramentas digitais para comunicar a sua resolução, mas também na exploração dos contextos e no descortinar de uma estratégia, como suporte do seu pensamento matemático. Conseguem tirar partido das tecnologias, reconhecendo e selecionando as potencialidades que são efetivamente úteis à resolução de um dado problema (os destaques, as cores, o desenho, os esquemas, as fórmulas, o texto) para produzir o seu próprio discurso matemático digital, num processo que respeita o seu ritmo de trabalho e as preferências em termos de abordagem, de estratégia, de tecnologias e representações que potenciam.

Das competições à sala de aula: como promover a resolução de problemas

No âmbito do projeto Problem@Web foram entrevistados vários professores, que acompanharam os seus alunos ao longo de sucessivas edições do Sub12 e do Sub14, com o propósito de compreender como encaram esta resolução de problemas, o que valorizam nesta experiência extraescolar, como colaboram com os seus alunos e ainda se e de que forma incorporam os problemas das Competições nas suas aulas.

Como veem as Competições e esta resolução de problemas?

Os professores entrevistados apreciam sobretudo a *natureza dos problemas* propostos aos concorrentes pois consideram que são *adequados para os fazer pensar* de tal forma que lhes permite *sair um bocadinho da rotina* que é inculcada por problemas mais rígidos, como aqueles que surgem nos manuais e apelam diretamente a determinados conhecimentos. Sublinham a possibilidade de os alunos desenvolverem a sua estratégia sem terem que recorrer forçosamente aos conteúdos que estão a trabalhar nas aulas e poderem *ir buscar conteúdos diferentes ou conhecimentos do dia a dia para resolver os problemas*.

[S]urge ali o problema para eles resolverem, portanto eles terão que ir pelo caminho que entenderem e fazerem esquemas ou aquilo que entenderem (. . .) eles têm que ir por outros caminhos e às vezes vão por caminhos muito engraçados. (entrevista P2)

Também mostram apreço pela diversidade nas temáticas escolhidas pois uns problemas *têm a ver com a parte da lógica, outros mais com a parte da geometria, outros em que se fazem outras conexões*, são muito *ricos* e permitem desenvolver muitas capacidades mesmo sem estarem alinhados com os programas.

Outro aspeto positivo é o desenvolvimento da comunicação matemática através do relatar de um processo ou justificar um raciocínio, mas adiantam que esta exigência das Competições se transforma num obstáculo já que *transcrever exatamente o raciocínio que fizeram* ou *explicar como é que raciocinaram* é muito difícil sobretudo para os alunos mais jovens. Para além de poderem *escolher muitas formas diferentes de resolver* os problemas, o facto de os concorrentes terem um período de tempo considerável para pensar na resolução de cada problema é motivo diferenciador.

Como a fase de apuramento se desenrola a distância, há um maior número de alunos a poder participar, o que inclui os de zonas mais distantes ou mesmo isoladas. Este aspeto promove também um maior envolvimento das famílias que chegam a contactar os professores procurando ideias para acompanhar os filhos. A vertente inclusiva das Competições é sublinhada pelos docentes no sentido em que permite que os alunos adquiram *mais autonomia, autoestima, fiquem com aquela ideia de que são capazes* de resolver aquele tipo de desafios.

Trazer as Competições para a aula de matemática

O facto de serem grandes entusiastas da resolução de problemas do Campeonato acaba por transparecer na forma como os docentes acompanham os seus alunos. Uma das professoras resolve cada novo problema assim que este é lançado na página do Sub12 e, já a pensar nas suas aulas, tenta definir pelo menos duas estratégias diferentes. Todavia surpreende-se sempre quando os seus alunos acabam por fazer outro raciocínio e apresentam resoluções criativas, diferentes das suas. Com essa experiência reconhece que tem aprendido muito com os seus alunos.

[E]les têm uma forma de pensar muito diferente da nossa (. . .) nós já estamos um pouco viciados. (entrevista P2)

Para além de recorrerem às Competições para reforçar o trabalho na resolução de problemas nas aulas de Substituição ou de Estudo Acompanhado, enquanto as havia, também utilizam estes problemas na aula de matemática. Selecionam um problema e projetam-no para a turma toda, mesmo que só alguns alunos estejam a participar nos Subs. Como refere um dos docentes, esta *é uma maneira de os integrar* no estilo das Competições, por isso opta por resolver os primeiros problemas em sala de aula. Inicialmente dá algum tempo para exploração autónoma por parte dos alunos *para eles pensarem, para se irem orientando e discutirem*. Nos minutos iniciais não tira dúvidas e incentiva a uma leitura cuidada pois entende que eles *têm de ler, têm de reler várias vezes, têm de experimentar*.

Geralmente, quando percebem que os alunos estão *um bocado embrulhados* nesses momentos iniciais, estes professores dão pequenas dicas para ajudar a desbloquear, mostram exemplos de abordagens ou sugerem formas de organizar a informação para ampliar a diversidade de ferramentas de resolução de problemas. Quando alguns alunos encontram uma solução, abrem uma discussão à turma a fim de comparar estratégias e resultados. Às vezes não é possível encerrar a discussão na aula e os alunos levam esta tarefa para concluir em casa — o que também permite mostrar que a resolução de problemas *é um processo que não é imediato* e que pode ser necessário *mais tempo* para encontrar a estratégia mais adequada.

À semelhança do que é exigido nas Competições, estes professores insistem em que os seus alunos justifiquem os processos usados e apresentem argumentos válidos. Tal insistência não visa apenas fazer cumprir as regras, já que consideram que é fundamental ser-se capaz de expor o que se pensou e o que se fez, mas encaram ainda este requisito como uma forma de *ver se eles têm confiança naquilo que fazem*.

Também nas aulas, os professores projetam a página das Competições com a tabela de resultados para que a turma acompanhe o progresso dos participantes. O que motiva os alunos mais jovens é verificar se alguma das resoluções da turma foi escolhida como *resolução admirável* e publicada na página. Esta atitude leva a que uma das docentes encoraje os seus alunos a serem inventivos e a encontrar várias estratégias de resolução do mesmo problema. Diz-lhes:

> esmerem-se a fazer e sejam originais (...) pensem lá de outra maneira, pensem na primeira e agora vejam lá se não há outra mais interessante. (entrevista P1)

Depois de os seus alunos se ambientarem com algumas técnicas ou estratégias, estes professores insistem para que resolvam os problemas sozinhos e continuem a participar de forma autónoma. Sempre que lhes pareça oportuno, também recorrem aos problemas dos campeonatos para trabalhar determinados conteúdos programáticos e apontam duas possibilidades, assim resumidas:

> podemos utilizá-los tanto para introduzir conteúdos, como aplicação de conteúdos para resolver. (entrevista P3)

No fundo, estes professores encontraram nas Competições Sub12 e Sub14 uma forma de motivar os seus alunos para a resolução de problemas e para a matemática. Reconhecem, com algum desânimo, que muitos alunos têm *a ideia de que resolver um problema é uma coisa chata, muito difícil, muito complicada, só acessível a alguns*. O desalento converte-se em esperança quando sentem que o seu esforço diário é recompensado:

> à medida que se vai encaminhando, eles vão sendo capazes de fazer e depois dizem «afinal era muito fácil!». (entrevista P2)

A persistência é, assim, um das aprendizagens que estes professores tentam desenvolver nos seus alunos, mas são eles próprios reflexo de uma certa perseverança: a de incluir frequentemente tarefas de resolução de problemas não rotineiros nas suas aulas de matemática — *leva um certo tempo, não se pode desistir logo à primeira!*

Notas

1 http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/

2 https://sites.google.com/site/problematwebeng/

Referências

Amado, N. & Carreira, S. (2012). Um olhar sobre uma competição matemática na Web — A resolução de problemas para além da sala de aula. *Educação e Matemática*, *119*, pp. 13–18.

Carreira, S., Amado, N. (Coords.), Ferreira, R. A., Rodriguez, J., Silva, J. C., Jacinto, H., Amaral, N., Nobre, S., Martins, I., Reis, S., & Mestre R. B. (2012). *Um olhar sobre uma competição matemática na Web*: Os SUBs. Faro: Universidade do Algarve. ISBN: 978-989-8472-19-9.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a Model and Modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism — Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 3–33). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hélia Jacinto
Escola Básica José Saramago, Poceirão & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade do Algarve & Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa