Um problema para o olhar

Dado um triângulo ABC qualquer, marque um ponto D no lado AB e trace DE paralelo a BC, como mostra a figura (figura 1). Una os pontos B com E e C com D, e marque o ponto de interseção F. Trace o segmento AF e prolongue-o de modo a intersectar o lado BC. O ponto de interseção é G. O segmento AG é sempre uma mediana do triângulo. Prove que esta afirmação é verdadeira.

Escolhi este problema porque ele apela fortemente ao recurso a um AGD para testar a validade da afirmação e porque esta demonstração, que não é simples, foi bem desafiante e inesperada para mim. A chave da demonstração está na maneira como olhamos para a figura (figura 1), para os seus elementos e no modo como procuramos invariantes entre esses elementos ou entre as suas relações.

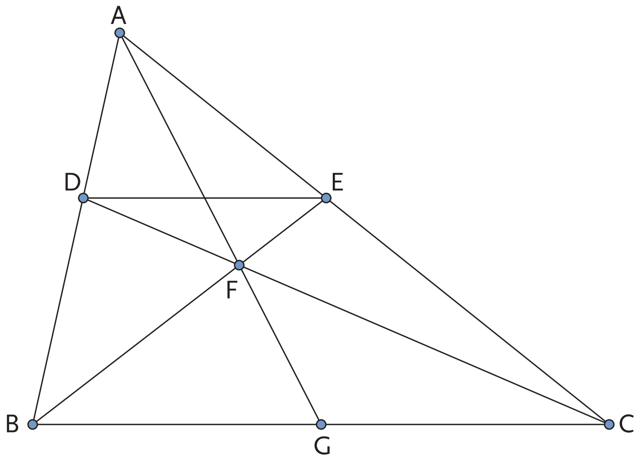

Figura 1

Para provar que AG é mediana basta provar que G é o ponto médio de BG, ou que BG = GC.

A demonstração tem que ter por base as propriedades relativas à situação, ou seja, que DE é paralelo a BC, e factos conhecidos que decorrem da semelhança de triângulos.

Ao examinar a figura é importante ter em conta que não temos apenas uma figura, mas todas as figuras que se obtém fazendo variar o triângulo ABC e a posição do ponto D. Uma sucessão de figuras auxiliares ajudam a ver o que está em causa.

Neste caso temos duas maneiras diferentes de olhar a figura (figura 2 e figura 3). Em qualquer dos casos estamos a dar atenção a pares de triângulos semelhantes, por isso destacamos os triângulos pintando-os. Num caso temos o triângulo ADE semelhante a ABC, no outro temos DFE semelhante a BCF. Para ambos os casos a razão de semelhança tem que ser igual pois ela é determinada pelo paralelismo dos segmentos DE e BC e pela relação que se estabelece entre DE e BC. Designamos esta razão por k. Temos BC = k DE.

O facto dos dois pares de triângulos terem a mesma razão de semelhança é o elemento crucial desta situação. Ao traçar o segmento AG mantêm-se a razão de semelhança entre novos pares de triângulos e podem ser obtidas relações entre outros segmentos.

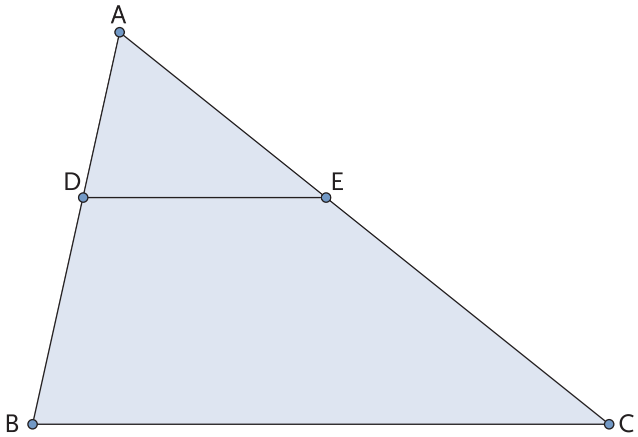

Figura 2

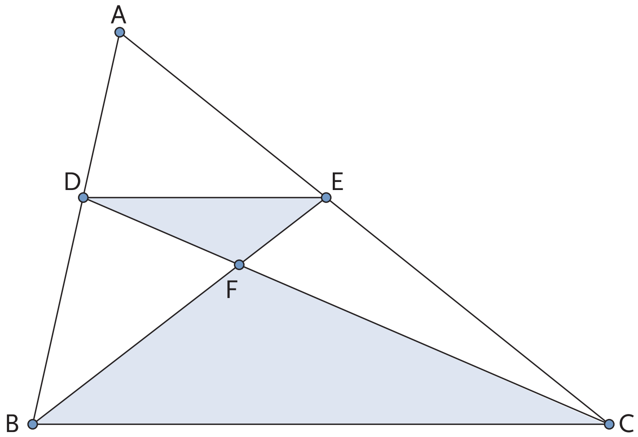

Figura 3

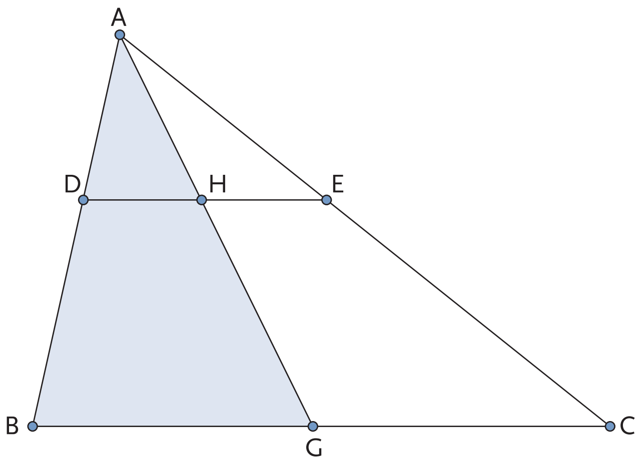

Figura 4

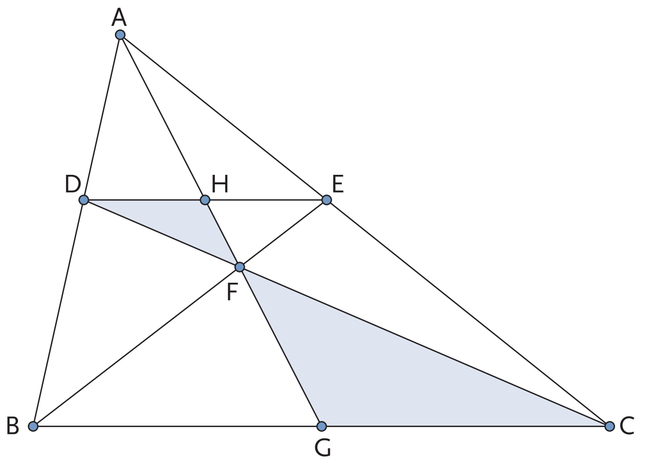

Figura 5

Estabelecendo agora relações entre os segmentos da figura (figura 4 e figura 5), obtemos:

BG = k x DH e também GC = k x DH

Destas duas igualdades podemos retirar que BG = GC. Precisamente o que queríamos demonstrar.

Chegamos ao fim da demonstração. Este resultado dá-nos mais uma ideia interessante e útil, um processo para obter paralelas (Figura 6). O processo é este: Desenhamos um triângulo ABC e obtemos o ponto médio de um dos seus lados, BC por exemplo. A partir desse ponto médio traçamos a mediana relativa a BC e marcamos um ponto qualquer sobre ela, o ponto P. As semirretas definidas por cada um dos vértices B e C e este ponto P intersetam os lados AB e AC em R e S. Estes dois pontos definem um segmento de reta RS paralelo a BC.

Este problema e esta construção são especialmente interessantes para explorar num ambiente de geometria dinâmica. Uma outra ideia que considero relevante tem a ver com a razão de escolha deste problema. Olhar e analisar várias vezes esta figura, procurando o máximo de relações entre os seus elementos confere-lhe também um dinamismo, mesmo que esteja desenhada em papel branco. Experimente.

Este problema foi retirado de Johnston-Wilder, Sue e Mason, John (Eds.) (2005). *Developing Thinking in Geometry*. London: The Open University. (p. 39). A discussão apresentada foi adaptada da discussão feita pelos autores do livro.

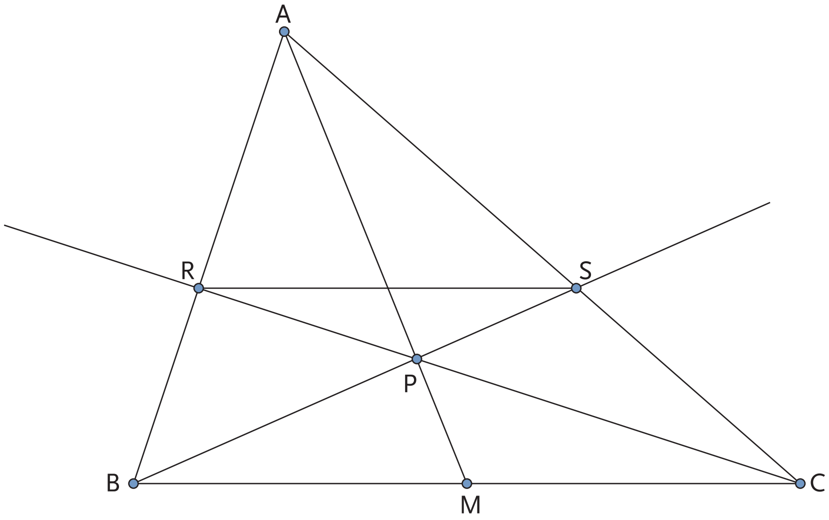

Figura 6