Quando os problemas não caem do céu

Pedro Cruz Almeida

A afirmação de que os problemas não caem do céu pode ser contrariada por uma valente carga de água. Mas vendo bem, ela não é, só por si, um problema. Os estragos por ela provocados só acedem à categoria de problemas porque nos afetam e, sobretudo, porque os queremos resolver. Os problemas, qualquer que seja o âmbito da atividade humana, são sempre construções de quem os quer resolver. Sempre? No ensino, e no ensino da matemática, a maioria dos problemas caem efetivamente, não do céu, mas das mãos dos professores ou dos cadernos de exercícios. Ainda assim, quem pretende resolver um problema já formulado tem de o interpretar e isso acaba por ser uma reformulação do problema. A inevitável interpretação que se faz de um problema constitui-se como um novo enunciado (Kilpatrick, 1987).

Neste artigo procuro sensibilizar para o papel da formulação de problemas no ensino da matemática. A minha preocupação está focada nos primeiros anos de escolaridade.

Breves referências à formulação de problemas

Uma visão, para mim inspiradora, do papel que a formulação de problemas desempenha na resolução de problemas é a lista de perguntas que George Pólya recomenda a quem pretende ou tem de resolver um problema, na sua famosa obra *How to Solve It* (2003/1945, 1.ª ed.). Desde que a resolução de problemas se tornou o centro das atenções do currículo e da investigação que a formulação de problemas se fez presente, apesar de não ter sido alvo da mesma atenção. Ela foi progressivamente ganhando direitos de cidadania. O ano de 1980 é considerado um marco no que se refere ao papel da resolução de problemas no currículo. Foi nesse ano que o National Council of Teachers of Mathematics publicou *An Agenda for Action*, (NCTM, 1980) colocando a resolução de problemas no centro do ensino da matemática e recomendando — esta é a parte que me interessa — que os alunos aprendam, entre outras coisas, a formular questões-chave, a analisar e conceber problemas e a definir o problema e o seu objetivo. Uma importante obra de referência para a formulação de problemas é *The Art of Problem Posing* (Brown & Walter, 2005), cuja primeira edição data de 1983. Este livro resulta de uma experiência acumulada por estes autores na realização de cursos dedicados à formulação e resolução de problemas desde meados dos anos 60 do séc. XX.

Na revista *Educational Studies in Mathematics* de maio de 2013, especialmente dedicada a este tema, podemos dar-nos conta do panorama da investigação nesta área. Reconhece-se que as atividades de formulação de problemas podem promover atitudes positivas para com a matemática e o envolvimento dos alunos nas atividades de aprendizagem, assim como contribuem para o desenvolvimento de capacidades e conhecimentos na resolução de problemas (Singer, Ellerton, & Cai, 2013). Há ainda outros dois artigos de que gosto muito. Um que aborda a avaliação da capacidade de formulação de problemas (Silver & Cai, 2005) e outro que usa a formulação de problemas para avaliar o conhecimento dos alunos sobre a divisão, em particular a divisão de 6 por 1/2 (Barlow & Drake, 2008).

O que é a formulação de problemas

Vou usar a definição dada por Stoyanova e Ellerton (1996) para dizer em que consiste a formulação de problemas: «o processo pelo qual os estudantes constroem interpretações pessoais de situações concretas, com base na sua experiência matemática, e as formulam como problemas matemáticos significativos» (p. 1). É uma definição muito abrangente, mas dá-me jeito que assim seja. Dentro desta definição, Stoyanova e Ellerton estabelecem três categorias de tarefas. Numa primeira categoria está a formulação livre, no sentido em que não tem de obedecer a um determinado constrangimento matemático. Quem inventa o problema escolhe o contexto, os dados e condições que determinam a estrutura matemática do problema. Numa segunda categoria consideram-se as formulações que devem obedecer a determinadas condições sem no entanto condicionar de forma fechada a estrutura matemática do problema. Designam-se por tarefas semiestruturadas. O aluno tem a liberdade de definir a estrutura matemática a partir de dados que lhe são fornecidos por meio de uma história, uma imagem ou uma outra representação. Nem sempre é fácil decidir se uma determinada tarefa deve ser incluída nesta categoria ou na terceira e última, a das tarefas estruturadas. Percebe-se que aqui estão as tarefas em que a estrutura matemática da situação está bem definida. Quem formula tem de encontrar o contexto que se adequa à estrutura ou descortinar tal estrutura dentro de um contexto que lhe é fornecido e uma condição que lhe é imposta.

Outros autores (Christou, Mousoulides, Pittalis, Pitta-Pantazi, & Sriraman, 2005) encontraram uma maneira de classificar as tarefas de formulação de problemas tendo em conta processos cognitivos utilizados: *compreender, editar, traduzir e selecionar*. Relacionadas com o processo *compreender* estão as tarefas em que se formula um problema para uma determinada expressão numérica que é apresentada. Trata-se de contextualizar a expressão exigindo, no mínimo, o conhecimento do significado e das propriedades das operações envolvidas. *Editar* é o processo envolvido numa tarefa que consiste simplesmente em formular um problema ou perguntas a partir de dados apresentados num texto ou numa imagem. O processo *traduzir* está presente quando, na tarefa de formulação, é exigida uma interpretação das relações entre os dados presentes numa representação matemática. Por exemplo, formular um problema que se resolva por meio de uma ou mais operações, a partir de dados apresentados sob a forma de gráficos, diagramas, tabelas . . . Quando se trata de descobrir a pergunta que produziu uma determinada resposta com base em dados de um enunciado, está envolvido o processo *selecionar*.

Há muito mais na literatura sobre categorização de tarefas, processos e estratégias (eg., Brown & Walter, 2005; Silver, 1994; Singer & Voica, 2013). O que apresentei até aqui é apenas um princípio que me tem orientado no desenvolvimento de tarefas de formulação de problemas.

A fotografia que vês ao lado mostra a embalagem e os pacotes do leite escolar que se bebem na tua escola.

Faz diferentes perguntas para serem respondidas a partir dos dados que a imagem mostra.[1]

Figura 1.—Tarefa (A) semiestruturada envolvendo o processo editar.

Alguns exemplos

As tarefas e os resultados que apresento foram realizadas em contexto de entrevista. Iniciei a aplicação destas tarefas quando os alunos frequentavam o 3.º ano e prossegui o trabalho durante o primeiro período do 4.º ano de escolaridade. Envolvi cinco alunos, dois rapazes e três raparigas com níveis de desempenho escolar diferentes. Um dos meus objetivos no trabalho que estou a desenvolver é observar o conhecimento matemático mobilizado por estes alunos em tarefas de formulação de problemas.

Tarefa A

A figura 1 mostra uma tarefa semiestruturada que envolve o processo *editar*. São fornecidos dados através de uma imagem e é pedido ao aluno que formule perguntas (problemas) que exijam a sua utilização na resolução. Não é estabelecida qualquer restrição quanto às operações que devem ser envolvidas. Os dados presentes podem ser relacionados aditiva ou multiplicativamente. A pergunta pode incidir sobre a diferença entre o número de pacotes dentro e fora da caixa ou pretender saber quantos mililitros de leite há em 27 embalagens. Por isso mesmo é uma tarefa que dá ao aluno a oportunidade de usar os conhecimentos que possui com alguma liberdade.

Devo chamar a atenção para a confusão entre *embalagem* e *pacote* que o enunciado negligentemente provoca. Esta confusão foi depois esclarecida oralmente, passando a chamar-se pacote à caixa que contém as embalagens.

Para esta tarefa o Ricardo fez quatro perguntas pela ordem que enuncio:

(a) Quantos ml há na embalagem?
(b) Quantos ml há num pacote?
(c) Quantas embalagens há no pacote?
(d) Se for o dobro dos pacotes quantos ml havia?

Pedi-lhe que numerasse as suas perguntas por ordem crescente de dificuldade e a sua resposta foi (c), (a), (d), (b). Explicou que as questões (c) e (a) são as mais fáceis por terem resposta dada na imagem. Do meu ponto de vista não deixam de ser perguntas interessantes pois correspondem à capacidade de focar a atenção e identificar dados no contexto. Mas a questão mais interessante aqui é ter decidido que a pergunta (d), que envolve duas operações, é mais fácil que a pergunta (b). A justificação dada pelo Ricardo baseou-se na possibilidade de se poder calcular o dobro usando a adição, sendo mais complicado saber a capacidade do pacote por conter muitas embalagens. De facto, quando na explicação ele cita a pergunta (d) para a comparar com a outra (b), lê apenas a expressão *se fosse o dobro* e não tem em conta o resto da pergunta (d). Só após a resolução da sua terceira pergunta, assim que lê a quarta, reconhece imediatamente que já a tinha resolvido.

Há uma condição no pedido que é feito ao aluno, a de que devem ser usados os dados fornecidos na imagem, no entanto os alunos frequentemente acrescentam dados. É

$$3 \times 6 = ?$$
$$3 \times ? = 18$$
$$? \times 6 = 18$$

Figura 2.—Conjunto das três expressões utilizadas numa tarefa (B) estruturada, envolvendo o processo compreender.

possível que tal possibilite uma formulação mais ajustada aos conhecimentos que se possuem, quer no sentido de complicar como de simplificar o problema.

O Daniel começou por formular três perguntas:

(a) Se houvesse 4 pacotes de leite escolar, quantas embalagens haveria?
(b) Quantos ml haveria nos 4 pacotes de leite?
(c) Quantos ml haveria em 10 pacotes de leite?

Pedi-lhe ainda uma quarta pergunta com uma condição: que fosse respondida por meio de uma divisão. Ao inserir esta condição no pedido da tarefa estou a aproximá-la de uma tarefa estruturada. No diálogo que se seguiu, o Daniel propõe que se determine metade (ou a quarta ou a oitava parte) «se houvesse 28 embalagens». Porquê 28? Porque 27 é primo, diz, e faço-lhe ver que tal não é verdade porque 27 se pode obter com 3×9. Mas é mais complicado, responde. Insisto que ele utilize o número 27 e pense por quanto o pode dividir. Acabou por escrever «Se houvesse 27 embalagens qual seria a 1/9 parte?» Este *se houvesse*, desnecessário, explica-se pela continuidade da sua utilização nas perguntas anteriores e por fidelidade à sua primeira formulação que contava com 28 embalagens. Estabelecidas as quatro perguntas, pedi ao Daniel que as ordenasse da mais fácil para a mais difícil. Contrariamente ao que esperava, colocou em primeiro lugar esta última, depois a que inquiria sobre o número de embalagens em 4 pacotes, em terceiro a que perguntava sobre a capacidade em mililitros de 10 pacotes e, por fim, a capacidade de 4 pacotes. À semelhança do Ricardo, a sua justificação baseia-se na facilidade dos cálculos. Refere que saber a nona parte é fácil porque «é só 3×9» e que também é fácil a multiplicação de 27 por 4. Quanto à maior facilidade em calcular a capacidade de 10 pacotes do que de 4, atribui ao facto de 10 ser «um número redondo» e exemplificou fazendo o cálculo mentalmente.

Tarefa B

A figura 2 mostra as expressões usadas numa tarefa estruturada que envolve o processo *compreender*. Foi pedido, para cada expressão, a elaboração de um contexto e de uma pergunta. Cada expressão foi apresentada num pequeno cartão, de modo que os alunos pudessem concentrar-se numa expressão de cada vez, escolher por onde começar, voltar atrás e reformular o que já tinham dito ou pegar noutra expressão. Tratou-se portanto de formular três problemas que podiam estar relacionados, por exemplo, mantendo o contexto e fazendo variar a incógnita. Esta tarefa pode parecer demasiado elementar por causa dos valores envolvidos mas, com isto, pretendi facilitar a escolha de um contexto próximo da realidade e não ocupar o aluno com a determinação do resultado. O meu objetivo foi verificar até que ponto os alunos conseguiam criar contextos que evidenciassem os diferentes sentidos das operações envolvidas.

Fiquei surpreendido. Afinal não é assim tão fácil inventar um problema para a expressão 3×6=?. Na primeira tentativa, a Diana começou por atribuir 3 objetos a uma personagem e 6 a outra, mas rapidamente percebeu que não resultava e voltou atrás. A primeira proposta da Inês ia no sentido de saber quanto tinham ao todo duas personagens, tendo uma 3 objetos e outra 6 vezes mais. Acabou também por perceber que não podia ser.

O Ricardo, embora tenha sido necessário focar a sua atenção para corrigir algumas incoerências textuais, deixou claras as suas intenções logo na primeira tentativa. Decidiu começar pela expressão 3×?=18 (I), seguindo depois para 3×6=? (II) e, por fim ?×6=18 (III). Manteve o mesmo contexto e fez variar a incógnita. Interessa comparar os enunciados que produziu para I e III.

(I) «O Vítor tinha 3 amigos e cada amigo deu-lhe um número de carros. O Vítor viu que todos deram o mesmo número e a soma foi 18. Quantos carros deu cada amigo?»
(III) «O Vítor ficou com 18 carrinhos e sabe que cada amigo lhe deu 6 carros. Quantos amigos tem o Vítor?»

Sei que o Ricardo não tem um conhecimento explícito dos sentidos da divisão, mas os enunciados que produziu referem-se aos sentidos de partilha equitativa (I) e de medida ou agrupamento (III). Esta *proeza* foi conseguida porque ele manteve o contexto, de tal forma que, tanto em I como em III, 3 corresponde ao número de amigos, 6 ao número de carros por amigo e 18 ao total de carros. Ele explica que para resolver estes problemas pode recorrer à divisão (18÷3 ou 18÷6). Embora formalmente pareça elementar, quando estas situações aparecem em problemas, exigem dos alunos concetualizações diferentes para a sua resolução.

Reflexões finais

Pode ser um exagero, mas os exemplos acima apresentados sugerem que a produção de um enunciado é mais revelador da competência matemática que a resolução de um problema. As tarefas A e B possuem características que me parecem essenciais para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. A primeira dá liberdade ao aluno para escolher a operação que resolverá o problema formulado, mas exige prestar atenção às possíveis relações entre os dados fornecidos. A segunda dá-lhe a operação e obriga-o a selecionar criteriosamente os dados e suas relações. Ambas possibilitam uma reflexão sobre as condições presentes no contexto, reflexão na qual o aluno está fortemente interessado porque é o autor do problema. Nos primeiros anos de escolaridade, os problemas de contexto próximo da realidade têm um papel importante por contribuírem para dar sentido ao conhecimento matemático e por estabelecer uma ligação entre este e a realidade. No entanto, o uso rotineiro e acrítico deste tipo de enunciados leva os alunos a uma leitura displicente dos enunciados, focando-se em indícios textuais para a seleção das operações que permitem resolver o problema, não sendo capazes de uma interpretação profunda da estrutura do problema (Corte, Verschaffel, & Greer, 2000). A utilização de atividades de formulação de problemas pode contribuir para desenvolver nos alunos uma abordagem mais crítica do enunciado. Mas para que isto aconteça, este tipo de atividades não podem ser esporádicas e aparecer isoladas, sem integrarem uma estratégia de ensino que articule toda a atividade matemática na sala de aula. O objetivo não é nem pode ser, na minha modesta opinião, pelo menos neste nível de ensino, aprender a formular problemas (mais giros, mais originais, . . .), mas desenvolver atitudes, capacidades e conhecimentos promotores do sucesso na aprendizagem.

Notas

1 27 Embalagens de 200 ml

Referências

Barlow, A. T., & Drake, J. M. (2008). Assessing understanding through problem writing. *Mathematics Teaching in Middle School*, 13(6), 326–332.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (2005). *The art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 37(3), 149–158. doi: 10.1007/s11858-005-0004-6

Corte, E. De, Verschaffel, L., & Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. Recuperado (set 2013) de http://math.unipa.it/˜grim/Jdecorte.PDF

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? In A. H. Schoenfeld (Ed), *Cognitive Science and Mathematics Education*, (pp 123–147). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*.
Recuperado (nov 2009) de http:// www.nctm.org / standards/content.aspx?id=17278 2009/11/29

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For The Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics*, 12 (3) 129–135.

Singer, F. M., & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. Educational Studies in Mathematics, 83, 9–26. doi: 10.1007/s10649-012-9422-x

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013). Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 1–7. doi: 10.1007/s10649-013-9478-2

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics.
Recuperado jun 2013, 2013, de http://www.merga.net.au/documents/RP_Stoyanova_Ellerton_1996.pdf

Pedro Cruz Almeida
Escola Superior de Educação de Lisboa