O problema do contínuo

Um problema eterno?

António M. Fernandes

Paris, 1900 [Exposição Universal]

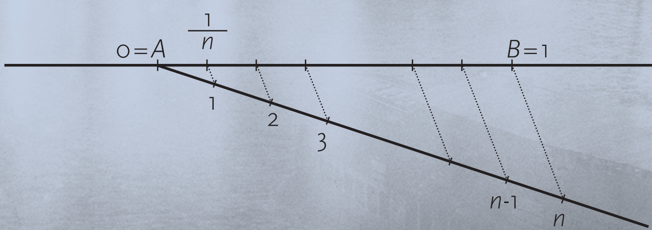


Figura 1.—Pontos numa recta com coordenadas racionais.

Dirigindo-se ao Congresso Internacional de Matemática (Paris, 1900), David Hilbert deu a conhecer uma lista contendo 23 problemas. A actividade matemática do Séc. XX viria a ser essencialmente determinada pelo conteúdo dessa lista.

Alguns anos antes, Richard Dedekind e Georg Cantor (independentemente) haviam descrito o análogo aritmético do *continuum* (a estructura da recta geométrica) obtendo *os números reais* a partir dos números racionais.

Uma vez fixados dois pontos A e B numa recta AB, podemos fazer corresponder a cada número racional um ponto dessa mesma recta (figura 1). Os pontos aos quais corresponde um desses números constituem a denominada

Figura 2.—David Hilbert

Figura 3.—Georg Cantor

recta racional. Que a recta racional não coincide com a recta geométrica é um facto conhecido desde a antiguidade.[1] O processo de estender os racionais aos reais constitui desta forma um processo de preenchimento das lacunas determinadas pela recta racional. Os pontos que correspondem aos *números reais* (entre os quais se incluem os racionais) constituem a *recta real*, aquela que finalmente identificamos com a *recta geométrica*.

A questão que encabeça a lista de Hilbert corresponde ao denominado *problema do contínuo de Cantor* que, de uma forma um tanto ou quanto prosaica, pode ser descrito como o *problema de saber quantos pontos existem numa recta*. A questão é à primeira vista absurda—*a recta tem infinitos pontos* . . .

Qual é o tamanho do infinito?

Em 1817 a Universidade de Halle (fundada em 1694) fundiu-se com a Universidade de Wittenberg (fundada em 1502), originando uma nova universidade que se passou a designar *Universidade de Martinho Lutero Halle-Wittenberg*. Wittenberg constituíra o mais importante pólo intelectual da Reforma Protestante sob a influência de Martinho Lutero e Philipp Melanchton. Wittemberg foi encerrada em 1813 no contexto das *Guerras Napoleónicas*. A fusão ocorreu na sequência do *Congresso de Viena* (1814–1815) que teve lugar após a queda do imperador francês.

A beligerância não conduziu apenas a reconfigurações geo-políticas. Este episódio motivou uma profunda reorganização do sistema universitário alemão, criando condições únicas para uma profíqua relação entre a matemática e a filosofia. Foi neste clima intelectual, entretanto solidamente constituído que, em 1867, e após ter concluído o seu doutoramento, Georg Cantor integrou a Universidade em Halle, lugar onde acabaria por permanecer durante toda a sua carreira académica.[2]

Como normalmente sucede com os génios visionários, Cantor não foi universalmente compreendido pelos seus pares. Alguns, influentes, como Leopold Kronecker, não se resignaram a uma incompreensão passiva. A tarefa de silenciar Cantor assumiu, neste caso, as proporções de uma *cruzada*.

Contudo, o seu *crime* foi apenas o de tentar responder à questão: *quão grande pode ser o infinito?*

O todo é maior que a parte

Aristóteles (384–322 a.C.) descreve na *Metafísica* o modo como as ciências dedutivas se devem organizar. Cada uma delas, segundo ele, deve proceder a partir de *primeiros prin-*

cípios. Alguns são comuns a qualquer ciência—os *axiomas* ou *noções comuns*—outros, são específicos de cada domínio—os *postulados*. É neste contexto que no primeiro livro dos *Elementos* surge como axioma: *O todo é maior que a parte*. A alegada natureza paradoxal da noção de *infinito* esteve quase sempre ligada a este *princípio*.

Existe uma tradição de análise continuada da noção de infinito desde Anaximandro (611–546 a.C.). Em plena idade média, quando esse escrutínio foi levado a cabo essencialmente por teólogos, a argumentação passou, curiosamente, a adquirir uma natureza lógico-matemática.

A opinião de Aristóteles foi neste assunto, como noutros, extraordinariamente influente: *o infinito actual não existe, o infinito só pode ser concebido potencialmente*. Contudo, esta posição não é sustentável mesmo aderindo ao modelo aristotélico dado que, para Aristóteles, o tempo não tem princípio nem fim e, o Universo e a Humanidade não possuem uma origem no tempo. Deste modo era díficil, para não dizer impossível, sustentar que no tempo presente não tivessem sido completadas um número infinito (actual) de revoluções da Lua em torno da Terra. Por outro lado, quando outros filósofos medievais, como Avicenna, procedendo na tradição aristotélica, se viram confrontados com a tentativa de conciliar a doutrina do estagiarita com a tese da sobrevivência individual da alma humana, as dificuldades encontradas não foram menores (embora neste caso, a solução concebida se tenha que considerar particularmente engenhosa).

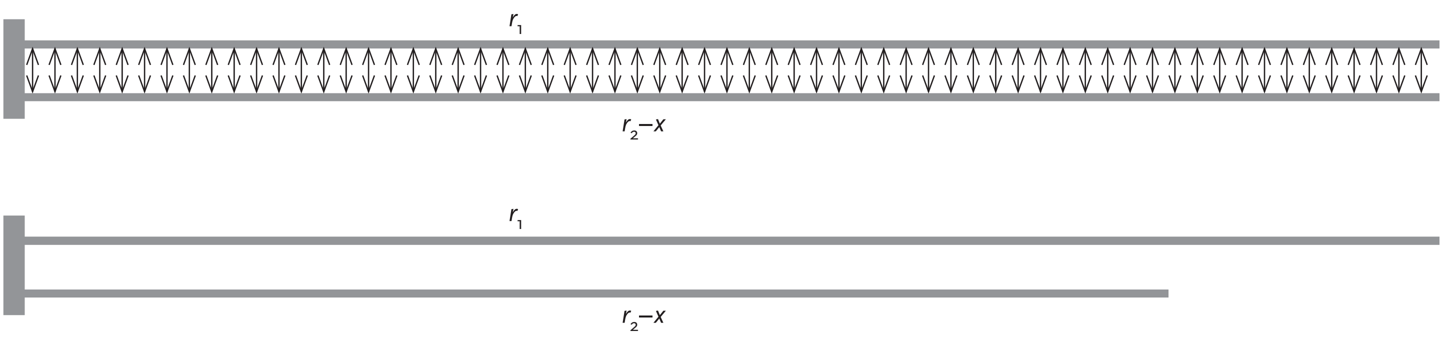
Avicena (c. 980–1037) foi um filósofo persa que escreveu tratados sob diversos assuntos, dedicando-se em particular à análise do *infinito*. Ele considerou a seguinte experiência mental: imaginemos dois raios (rígidos) que se projectam a partir da Terra, infinitamente. Designemos por x a parte inicial do segundo desses raios que, digamos, tem como extensão a distância entre a Terra e a Lua. Removamos essa parte x do segundo raio e movamos o remanescente de modo que a sua origem passe a coincidir com a origem do primeiro raio (a Terra). A experiência só pode ter como resultado uma das duas situações descritas na figura 4. Na primeira situação, existiria uma correspondência bijectiva (uma correspondência perfeita, nas palavras de Avicenna) entre os pontos de um raio e de outro, pelo que *seriam iguais, não obstante um ser uma parte do outro* (contradição!). Na segunda hipótese o raio original (infinito) seria a soma de x com o remanescente e, sendo ambos finitos, uma coisa infinita obter-se-ia da soma de duas finitas (contradição!).

Avicenna conclui que o *infinito actual* não pode existir mas, fruto de uma análise mais fina, observa que o seu argumento só se pode aplicar a *totalidades* cujos constituintes se encontrem ou *essencialmente ordenados* ou *espacialmente ordenados*. Desta forma, ao contrário do que suponha Aristóteles, certas totalidades infinitas podem existir, e.g. a totalidade das almas (visto não se poderem ordenar essencialmente ou espacialmente como os pontos de uma recta).

Este episódio é interessante pois revela que este movimento, de uma argumentação física para uma argumentação mais abstracta de teor lógico-matemático, teve o poder de libertar estas concepções de amarras desnecessárias. Aquelas que restam resumem-se ao axioma aristotélico segundo o qual, *o todo é maior que a parte*. As contradições com este princípio são geralmente obtidas constatando a existência de uma bijecção entre uma certa colecção de objectos e uma sua parte própria e, interpretando a existência de uma tal bijecção como um testemunho do facto de terem o mesmo número de elementos.

Muitos séculos mais tarde Galileu Galilei (1564–1642), nos seu *Diálogos sobre as duas novas ciências,* é confrontado com idêntico dilema. Ele considera os números naturais 1,2,3, . . . e os números naturais que são quadrados perfeitos 1,4,9, . . . e constata a existência de uma bijecção (correspondência bi-unívoca) entre ambas as colecções, designadamente a correspondência $n \leftrightarrow n^2$. Conclui então que se os números naturais e os quadrados perfeitos pudessem

Figura 4.—A experiência mental de Avicena



ser vistos como totalidades, a existência daquela correspondência forçar-nos-ia a concluir que *o todo não é maior que a parte*.

Cantor versus Aristóteles

Considerando os conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{x, y\}$ e $C = \{\bullet, \circ, *\}$ não existe qualquer dificuldade em concordar com as afirmações: *A e B têm a mesma quantidade de elementos* e *a quantidade de elementos em A é menor que em C*.[3]

A *quantidade de elementos num conjunto* corresponde à sua *cardinalidade* e dois conjuntos X, Y com a mesma cardinalidade dizem-se *equipotentes* escrevendo-se, simbolicamente, $|X| = |Y|$. (No exemplo acima tem-se então que $|A| = |B|$.)

Conclui-se que A e B são equipotentes simplesmente contando os elementos em ambos os conjuntos (ambos têm *dois* elementos). Mas, para generalizar a noção de cardinalidade (ou de equipotência) a conjuntos infinitos, como fez Cantor, não podemos depender do processo de contagem, dado não ser possível percorrer todos os elementos de um conjunto infinito *contando-os*.

A verificação da relação $|A| = |B|$ pode, contudo, efectuar-se sem envolver directamente um processo de contagem. Continuando a considerar A e B, é possível definir uma correspondência *biunívoca* (ou, como também se diz, uma *bijecção*) entre os elementos de A e os elementos de B. Isto traduz-se na existência de uma *função* $f : A \to B$ que é *injectiva* e *sobrejectiva*.

Uma função $f : X \to Y$ é *injectiva* se dados $x, y \in X$, com $x \neq y$, os elementos que lhes correspondem através de f (que iremos denotar por $f(x), f(y)$, respectivamente) são igualmente diferentes (mais formalmente: $(\forall x, y \in X)[x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)]$); e é *sobrejectiva* se para qualquer elemento em Y existe um elemento em X que lhe corresponde através de f, i.e. para qualquer $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ (ou, mais formalmente: $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) y = f(x)$).

Retomando o exemplo inicial, a função $f : A \to B$ definida por $f(a) = x$ e $f(b) = y$ testemunha que $|A| = |B|$, uma vez que é bijectiva.

Os exemplos acima permitem-nos ainda fazer uma observação interessante: é fácil concluir que não pode existir nenhuma aplicação bijectiva $h : A \to C$ (como $a \neq b$, depois de escolhermos as respectivas imagens [diferentes] sobra um terceiro elemento que não pode ser imagem de a ou de b, caso contrário um mesmo objecto teria duas imagens, o que é impossível numa função). Também não pode existir uma função bijectiva $g : C \to A$. (O leitor poderá constatar que uma função $g : C \to A$ nunca poderá ser injectiva.)

Igualmente interessante: a não existência de uma bijecção entre os conjuntos A e C revela que possuem cardinalidades diferentes mas, a existência de aplicações injectivas $h : A \to C$ (ou, o que é o mesmo, de aplicações sobrejectivas $g : C \to A$) testemunham o facto de a cardinalidade de A não ser superior à cardinalidade de C.

Vale a pena notar que no caso finito, estas considerações estão intimamente ligadas ao processo de contagem. De facto, os números naturais são, no contexto da teoria de conjuntos, introduzidos de acordo com o seguinte esquema:

$$0 := \emptyset;\ 1 := \{0\};\ 2 := \{0, 1\};\ 3 := \{0, 1, 2\};\ \cdots;$$
$$n + 1 := \{1, 2, \ldots, n\};\ \cdots.$$

(Denotamos acima por $\emptyset$ o *conjunto vazio*, i.e. o conjunto que não possui quaisquer elementos.) Desta forma, dizer que o conjunto C acima tem três elementos é o mesmo que dizer que existe uma bijecção entre C e o *conjunto* $3 = \{0, 1, 2\}$.

De uma maneira geral, diz-se que um conjunto X é finito se existe uma bijecção entre X e um natural $n \in \mathbb{N}$.

Cantor generalizou as considerações anteriores permitindo-se comparar, do ponto de vista da cardinalidade, quaisquer conjuntos, finitos ou não. Desta forma, dados dois conjuntos X, Y dizemos que são *equipotentes* (continuando a escrever $|X| = |Y|$) se existe uma bijecção $f : X \to Y$. Por outro lado, dizemos que a cardinalidade de X não excede a cardinalidade de Y (escrevemos $|X| \leq |Y|$) se existe uma função *injectiva* $h : X \to Y$ (pode verificar-se que isto é equivalente à existência de uma aplicação *sobrejectiva* $g : Y \to X$).

Tem-se:

- se $|X| = |Y|$ então $|Y| = |X|$ (se existe uma bijecção $f : X \to Y$ então, a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ é igualmente uma bijecção).
- se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |Z|$ então $|X| \leq |Z|$ (se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ são injectivas, então a composição $g \circ f : X \to Z$ é injectiva).
- se $|X| \leq |Y|$ e $|Y| \leq |X|$ então $|X| = |Y|$, i.e. se existem aplicações injectivas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ então existe uma bijecção entre X e Y (este resultado não trivial é conhecido como teorema de Cantor-Shröder-Bernstein).

A notação $|X| < |Y|$ abrevia $|X| \leq |Y|$ e $|X| \neq |Y|$, ou seja, o facto de a cardinalidade de X ser estritamente inferior à cardinalidade de Y.

O próprio Cantor, usando estas novas noções, foi capaz de estabelecer alguns resultados surpreendentes. Em primeiro lugar, constatou a existência de cardinalidades infinitas diferentes. De acordo com o resultado conhecido por *Teorema de Cantor* tem-se que $|X| < |P(X)|$, para qualquer conjunto X. Por $P(X)$ denota-se o conjunto das partes de X que é constituído por todos os subconjuntos de X—um conjunto A é *subconjunto* de um conjunto X (escreve-se $A \subset X$) se todo o elemento de A é elemento de X. Por convenção o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto X e, como é claro a partir da definição $X \subset X$, para qualquer X.

Para estabelecer o teorema de Cantor há que estabelecer duas coisas: (1) a existência de uma função injectiva $f : X \to P(X)$ (o que permitirá estabelecer $|X| \leq |P(X)|$); (2) a inexistência de uma função sobrejectiva $h : X \to P(X)$ (o que permitirá concluir que $|X| \neq |P(X)|$). De (1) e (2) decorre que $|X| < |P(X)|$.

Comecemos por (1): a função $f : X \to P(X)$ definida por $f(a) := \{a\}$ é injectiva. (A conclusão usa o facto de dois conjuntos serem iguais se e só se possuírem os mesmos elementos. Desta forma dois conjuntos singulares $\{a\}$ e $\{b\}$ são iguais se e só se $a = b$.)

Quanto a (2): a não existência de uma sobrejecção $h : X \to P(X)$ far-se-á por redução ao absurdo, ou seja, vamos supor a existência de uma tal sobrejecção e com isso deduzir uma contradição. (Desta forma a existência de uma sobrejecção $h : X \to P(X)$ revela-se insustentável pelo que teremos de concluir a sua não existência.) Suponhamos então que $h : X \to P(X)$ é uma sobrejecção. Isto significa que dado um qualquer $A \subset X$, existirá sempre um elemento $a \in X$ tal que $A = h(a)$. Uma vez que para qualquer $a \in X$ se tem que $h(a) \subset X$ faz sentido considerar o subconjunto de X constituído pelos $a \in X$ tais que a não é elemento de $h(a)$. Definimos assim:

$$\Gamma = \{a \in X \mid a \notin h(a)\}$$

que é um subconjunto de X. Como estamos a supor que h é sobrejectiva, existe $b \in X$ tal que $h(b) = \Gamma$ e, é agora que *o milagre se opera*:

$$b \in \Gamma \textit{ se e só se } b \notin h(b) \textit{ se e só se } b \notin \Gamma,$$

uma vez que $\Gamma = h(b)$, obtendo-se desta forma a contradição pretendida.[4]

Fazendo mais algumas considerações adicionais, este resultado permite desde logo mostrar que a cardinalidade dos números naturais é estritamente inferior à cardinalidade dos números reais. Com efeito, o intervalo $[0, 1]$ tem a mesma cardinalidade de $P(\mathbb{N})$. Com efeito, qualquer número real $x \in [0, 1]$ possui uma *representação diádica*, ou seja, pode ser escrito na forma:

$$\frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2^2} + \frac{\alpha_2}{2^3} + \frac{\alpha_3}{2^4} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}} + \cdots \qquad (*)$$

onde cada $\alpha_i \in \{0, 1\}$. O critério para obter a representação diádica é o seguinte: $\alpha_0 = 0$ se $x < 1/2$ e $\alpha_0 = 1$ se $x \geq 1/2$. Depois disso, de uma maneira geral,

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 0 & \left(\text{se } x < \frac{\alpha_0}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}\right) \\ 1 & \left(\text{se } x \geq \frac{\alpha_0}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{2^{n+1}}\right) \end{cases}$$

Como a representação geométrica deixa antever, à medida que vamos somando as parcelas na *soma formal* (*) o resultado vai-se aproximando progressivamente do valor x coincidindo, no limite, com o próprio x. Se x for um número racional, então a partir de certo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $\alpha_n = 0$. Caso contrário, existe uma infinidade de naturais $n \in \mathbb{N}$ para os quais $\alpha_n = 1$.

De qualquer forma, o que é importante para o argumento é que, por este processo, existe uma correspondência biunívoca entre os números no intervalo $[0, 1]$ e as sequências infinitas de *zeros* e *uns*. Finalmente, existe também uma correspondência biunívoca entre o conjunto de tais sequências e $P(\mathbb{N})$, designadamente aquela que a $A \subset \mathbb{N}$ faz corresponder a sequência infinita $(\alpha_0^A, \alpha_1^A, \alpha_2^A, \ldots, \alpha_n^A, \ldots)$ que se define através de

$$\alpha_n^A = 1 \textit{ se e só se } n \in A.$$

Tem-se então:

$$|\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = |[0, 1]| \leq |\mathbb{R}|.$$

Poderíamos ser levados a pensar que o mesmo tipo de relação se verifica entre as cardinalidades de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$. Com efeito, à primeira vista, $\mathbb{Q}$ parece ter muito mais elementos que $\mathbb{N}$, sobretudo devido à *densidade da ordem dos racionais*, i.e. devido aos facto de entre dois racionais existir sempre um terceiro. Contudo, esse não é o caso e tem-se $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Por um lado, é claro que $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$. Por outro lado, $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N}|$ pois existe uma função injectiva $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ que se define de acordo com o seguinte: dado um racional $q \in \mathbb{Q}$ começamos por escrevê-lo na forma de uma fracção irredutível p/q. Tem-se assim que $r = p/q$ e $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$. Posto isto, define-se (usando o teorema fundamental da aritmética),

$$f(r) = \begin{cases} 0 & (\text{se } r = 0) \\ 2 \cdot 3^{p+1} \cdot 5^{q+1} & (\text{se } r > 0). \\ 2^2 \cdot 3^{p+1} \cdot 5^{q+1} & (\text{se } r < 0) \end{cases}$$

Estes exemplos, e outros considerados por Cantor considerou, conduziram-no à questão de saber se, dado um conjunto infinito qualquer de números reais $X \subset \mathbb{R}$, se terá sempre que $|X| = |\mathbb{R}|$ ou $|X| = |\mathbb{N}|$ ou se, pelo contrário,

Figura 6.—Da esquerda para a direita: Ernst Zermelo e Abraham Faenkel

existirão *cardinalidades intermédias*. Este é na sua essência o *problema do contínuo de Cantor*.[5]

A *hipótese do contínuo* está intimamente ligada a este problema mas envolve um outro aspecto—o princípio da *boa-ordenação*, que estabelece a possibilidade de fixar em cada conjunto uma *boa-ordem*. (Para uma discussão mais detalhada deste princípio ver o artigo de Isabel Oitavem, Helena Rocha e Reinhard Kahle, neste mesmo número.)

As respostas de Kurt Gödel e Paul Cohen

Durante toda a sua vida, Cantor perseguiu, sem êxito, uma resposta para a questão do *continuum*. Em diversas ocasiões julgou ter demonstrado que a *hipótese do contínuo* era verdadeira e, em outras tantas que era falsa. Em todos os casos acabou por encontrar alguma falha na sua argumentação. Sabemos hoje que uma tal decisão não pode ocorrer no seio da teoria de conjuntos, pelo que os esforços de Cantor estariam sempre condenados ao fracasso—a hipótese do contínuo é *independente* dos axiomas da teoria de conjuntos. É uma situação análoga àquela que envolveu o famoso *Postulado V* de Euclides, do qual decorre que através de um ponto exterior a uma recta se pode fazer passar uma única paralela. O *Postulado V* é independente da denominada *geometria pura*, ou seja, a geometria cujos axiomas excluem o *Postulado V*.

Em termos muito gerais, suponhamos que um dado domínio da matemática é axiomatizado através de axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$. Estes descrevem factos que se assumem verdadeiros acerca de certo tipo de objectos cuja natureza se pretende investigar (podem ser pontos, rectas, planos, etc. . . ., no caso da geometria, certos tipos de entidades algébricas no caso da álgebra, ou conjuntos, no caso da teoria de conjuntos). Se, utilizando os axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ como hipóteses for possível demonstrar uma determinada sentença ξ (simbolicamente escrevemos $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots \vdash \xi$) então em qualquer *interpretação* que se considere dos objectos e relações básicas onde os axiomas sejam verdadeiros, também ξ será verdadeira. (Isto acontece porque as demonstrações propagam a verdade.)

Desta forma, perante uma sentença ξ, se for possível descrever interpretações numa das quais ξ é verdadeira e noutra ξ é falsa, somos forçados a concluir que nem ξ nem a sua negação (que se denota $\neg\xi$) se podem demonstrar a partir dos axiomas $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$.

Detenhamo-nos por mais algum tempo sobre esta noção de *interpretação*. De modo a mantermo-nos próximos do nosso objecto de discussão faremos algumas considerações sobre o caso da teoria de conjuntos.

Uma *interpretação* da teoria de conjuntos consiste numa colecção V de objectos que serão vistos como *conjuntos*—o *universo da interpretação*—e, uma relação E que descreve, ou *interpreta*, a relação de pertença: dados dois objectos x, y em V, se x se relaciona com y do ponto de vista de E, isso

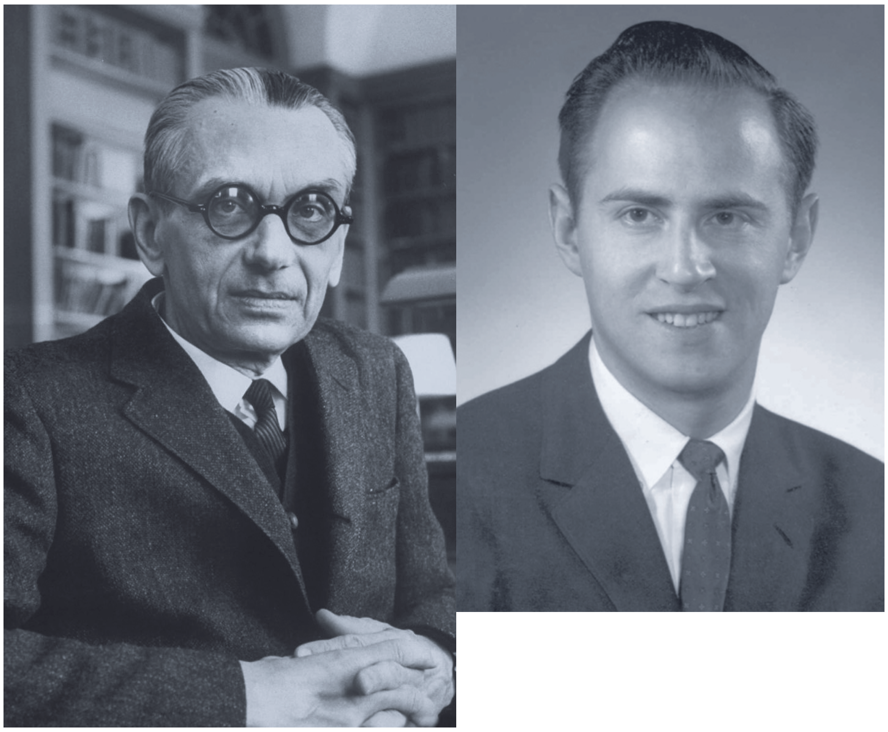


Figura 7.—Da esquerda para a direita: Kurt Gödel e Paul Cohen

significa que x é um elemento de y na interpretação (V, E). Como se depreende, a relação E é *binária* ou seja descreve uma relação que envolve pares de elementos sendo por esse motivo que do ponto de vista matemático se identifica E com um conjunto (no sentido natural) de pares ordenados de elementos de V. Finalmente, e para tornar a escrita mais natural, em vez de escrever $(x, y) \in E$ escreveremos xEy.

Consideremos como exemplos: (V_1, E_1) e (V_2, E_2) onde definimos $V_1 = \{*, \circ, \bullet\}$, $E_1 = \{(\bullet, \circ), (\bullet, *)\}$ e $V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, $E_2 = \in$. Na interpretação (V_1, E_1) o objecto $\bullet$ é o conjunto vazio (o único conjunto do universo V_1 que não tem elementos [do ponto de vista de E_1]). Esta interpretação tem ainda outra característica interessante. De acordo com a concepção cantoriana, dois conjuntos são iguais se possuem os mesmos elementos. Mais tarde, quando Ernst Zermelo e Abraham Fraenkel axiomatizaram a teoria de conjuntos, esta concepção traduzir-se-ia no denominado *axioma de extensionalidade*. Ora, na interpretação (V_1, E_1) o axioma da extensionalidade é falso porque os *conjuntos* $*$ e $\circ$ têm os mesmos elementos (o conjunto $\bullet$) e, no entanto, são diferentes. Uma simples verificação mostrará que na segunda interpretação—(V_2, E_2)—este axioma é verdadeiro.

Em 1938 Kurt Gödel cumpriu uma primeira etapa na tentativa de clarificar a natureza da hipótese do contínuo. Essencialmente, ele foi capaz de descrever uma interpretação da teoria de conjuntos — o *universo construtível* de Gödel— onde todos os axiomas são verdadeiros e, adicionalmente, a hipótese do contínuo também é verdadeira. A existência desta interpretação veio revelar que na teoria de conjuntos não é possível demonstrar que a hipótese do contínuo é falsa ou, como se diz em terminologia mais técnica, que a hipótese do contínuo é *consistente* com a teoria de conjuntos. (As demonstrações propagam a verdade, o que significa o seguinte: se numa interpretação as hipóteses da demonstração [neste caso os axiomas] são verdadeiros então as sentenças demonstradas também são necessariamente verdadeiras.)

Gödel perseguiu activamente a resposta definitiva à questão do *continuum*. Restavam agora duas hipóteses: ou a teoria de conjuntos demonstrava a hipótese do contínuo ou então, deveria existir um outro tipo de interpretação onde os axiomas da teoria de conjuntos seriam verdadeiros e a hipótese do contínuo, falsa. A própria abordagem de Gödel revelou que seria difícil encontrar essa interpretação, a menos que se inventasse um método radicalmente novo. A razão é simples, Gödel descreveu um método através do qual (de maneira uniforme), se poderia obter dentro de qualquer universo de conjuntos, um sub-universo ou, como também se diz *um modelo interno* que satisfaz a hipótese do contínuo. A menos que nos dispunhamos a considerar universos de certo modo *estranhos* se operarmos a construção godeliana então, independentemente do universo de conjuntos onde a efectuemos, obtemos sempre o mesmo modelo interno (que se denota L). Assim, se fosse possível descrever um processo análogo ao descrito por Gödel que conduzido no seio de um universo de conjuntos arbitrário, desse origem a um modelo interno onde a hipótese do contínuo fosse falsa, então isso sucederia se, em particular, fosse feito no seio de L. Contudo, L não possui outros modelos internos que não sejam ele próprio. Desta forma ter-se-ia que o modelo descrito pela construção seria o próprio L pelo que, em L a hipótese do contínuo deveria ser falsa e isso, não sucede.

Viria a acontecer já na década de 1960 que Paul Cohen equipado de ideias radicalmente novas (como era necessário) foi capaz de produzir uma outra interpretação da teoria de conjuntos onde a hipótese do contínuo é falsa. (Uma vez que o método dos modelos internos, usado por Gödel, estava fora de questão, Cohen recorreu aos denominados modelos exteriores, i.e. interpretações cujo universo é uma extensão de um universo de conjuntos previamente considerado.)

Desta forma, a teoria de conjuntos também não é capaz de demonstrar a hipótese do contínuo.

Conjuntamente, os resultados de Gödel e de Cohen mostram que a hipótese do contínuo é independente dos axiomas da teoria de conjuntos. A questão do *continuum* de Cantor ficava assim resolvida . . . *Será assim?*

Matemática: um mundo inacabado . . .

Não sem algum espanto a comunidade matemática acolheu os famosos resultados de incompletude (Gödel, 1931).

Pressupondo um determinado aparato lógico de fundo, não importa que axiomas fixemos (desde que possamos decidir, perante uma sentença se é ou não um axioma) existirão sempre proposições que não se podem demonstrar ou refutar nessa axiomática (dizem-se *independentes* dessa axiomática). A Matemática é pois uma *obra inacabada*. Os axiomas da teoria de conjuntos, são insuficientes (e sê-lo-ão sempre) para decidir todas as questões acerca do universo de conjuntos e, em última análise, todas as questões matemáticas. A *geometria pura* não consegue decidir o axioma das paralelas e é possível expandi-la de formas que são incompatíveis entre si mas que, não obstante, fornecem geometrias alternativas, todas elas interessantes. Nesse caso não necessitamos de optar por uma delas, já que todas elas constituem sistemas onde se pode desenvolver matemática importante.

Já no caso de um sistema fundacional, como a teoria de conjuntos, optando por conservar vários sistemas (incompatíveis entre si) corresponde a manter activo, o desenvolvimento de *várias Matemáticas*. A questão adquire pois uma natureza diferente e, muito embora não exista razão, a priori, para que a actividade matemática não se ocupe de *diversas Matemáticas* em simultâneo, essa não tem sido a prática seguida.

De resto uma tal postura pressuporia uma atitude filosófica face à Matemática muito peculiar. Mas independentemente de uma tal atitude se tornar predominante e determinar o curso destas opções, a verdade é que subsistirá sempre uma segunda dificuldade: não é razoável aceitar a hipótese do contínuo, ou a sua negação como axiomas.

Quando Euclides fixou os axiomas da Geometria Euclidiana, esses axiomas foram escolhidos com base na evidência do seu carácter de verdade. Mesmo que num dado momento todos pudéssemos concordar sobre esse carácter, não deixaria de ser uma escolha fundada num certo grau de subjectividade (que, neste caso, o tempo se encarregou de elucidar). No caso da teoria de conjuntos (o actual sistema fundacional) a escolha dos axiomas não foi feita com base no mesmo critério, os axiomas foram isolados com base na sua capacidade de descrever os diferentes aspectos da Matemática, por um lado, e por descreverem aspectos essenciais da estrutura de um *idealizado* universo de conjuntos, por outro. E esta é a razão pela qual não podemos simplesmente adoptar a hipótese do contínuo ou a sua negação como um novo axioma. Nenhuma dessas asserções caracteriza de forma directa um aspecto dessa estrutura.

O desafio permanece vivo: isolar um princípio estrutural que permita decidir a hipótese do contínuo. Deste ponto de vista, o desafio de Hilbert permanece activo. A resposta que lhe será dada trará certamente uma nova luz sobre a essência da Matemática e, provavelmente sobre o modo como escolheremos, no futuro, como ela evoluirá.

Notas

[1] A descoberta da incomensurabilidade entre o lado e a diagonal de um quadrado que corresponde à irracionalidade de $\sqrt{2}$ é um facto geralmente atribuído à escola pitagórica.

[2] Não obstante o seu desejo em se mudar para universidades mais importantes como Berlim ou Göttingen

[3] Desde que se admita nestes exemplos que símbolos diferentes denotam objectos diferentes.

[4] De acordo com alguns historiadores da matemática este resultado de Cantor estará na origem do famoso paradoxo de Russell.

[5] Não é difícil constatar que se $X \subset Y$ então $|X| \leq |Y|$, por outro lado a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é a menor cardinalidade infinita, i.e. se X é infinito então $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

António M. Fernandes
Dep. Matemática, IST—Universidade de Lisboa