Funções no terceiro ciclo do ensino básico - uma possível abordagem...

Leonor Cunha Leal

O estudo das funções constitui um dos aspectos centrais dos programas de Matemática para o 3º ciclo do Ensino Básico mas suscita geralmente vários tipos de dificuldades de aprendizagem. Neste artigo, descreve-se e comenta-se a abordagem adoptada pelo Projecto MAT_{789} para o estudo deste tema no 8º ano, no âmbito do currículo experimental que o Projecto tem vindo a desenvolver.

Poder-se-á afirmar que o estudo das funções no 3º ciclo do ensino básico levanta normalmente, junto dos alunos, dificuldades de vária ordem. Ainda este ano no Profmat, numa sessão prática, onde este tema serviu de base para reflexão, foram indicados, pelos professores presentes, vários tipos de dificuldades sentidas pelos alunos. Entre elas, pode-se apontar a interiorização do conceito de função, sendo a razão que justifica tal dificuldade o elevado grau de abstracção, as questões de linguagem, a dificuldade em distinguir o contradomínio do conjunto de chegada, e ainda a compreensão do significado de função injectiva, de função sobrejectiva e de função inversa.

Esta problemática é do mesmo modo sentida e reconhecida por um conjunto de cinco professores responsáveis por um projecto de inovação curricular, o Projecto MAT_{789} (1). Este projecto propõe-se conceber, aplicar e avaliar um novo currículo de Matemática, para o 3º ciclo do ensino básico, acompanhando os alunos nos três anos que compõem este ciclo. Tendo-se iniciado, no ano lectivo de 1988/89, com duas turmas do 7º ano de escolaridade, na Escola Secundária de D. Pedro V, incluiu, no ano lectivo seguinte, duas novas turmas do mesmo ano, uma delas ainda da mesma escola e a outra pertencente à Escola Secundária da Amadora.

Opções fundamentais

No âmbito deste Projecto o tema das funções foi desenvolvido de acordo com algumas opções fundamentais, a saber:

- incidir o seu estudo essencialmente no 8º ano, embora propondo para o 7º actividades práticas envolvendo gráficos sem, contudo, haver qualquer preocupação de formalização;
- dar a conhecer aos alunos uma diversidade, tão grande quanto possível, de funções, não compartimentando o seu estudo a este ou aquele tipo, ao contrário do que os novos programas parecem sugerir;
- propor actividades com o objectivo primordial de favorecer a construção, por parte dos alunos, do conceito de função, remetendo para segundo plano toda a carga formal muitas vezes associada a este tema;
- atribuir à representação gráfica de funções um peso, no mínimo, idêntico ao da representação analítica;
- incluir actividades de modelagem, por se entender que o tema proporciona naturalmente este importante tipo de actividades, surgindo relações significativas com a realidade, onde os alunos podem contactar com o "poder da Matemática".

Desenvolvimento do tema

Para tornar mais claro o que foi exposto, veja-se como de facto este tema foi desenvolvido. O primeiro contacto que os alunos tiveram com as funções foi feito através de um programa de computador, programa este ou um seu similar já anteriormente utilizado noutras escolas e por outros professores. Os alunos trabalharam em pequenos grupos, na sala do Projecto Minerva, durante duas horas, jogando com o programa. Foi-lhes anteriormente explicado que tinham sido introduzidas no computador algumas leis de transformação que seriam escolhidas aleatoriamente. Os alunos teriam de introduzir os valores que quisessem até conseguirem descobrir qual a lei que naquele momento estava a ser utilizada pelo computador. Ao descobrirem, voltariam a iniciar todo o processo. Este trabalho deveria ser acompanhado do registo, nos cadernos, dos pares de valores que iriam sendo calculados. Poder-se-á perguntar, o que é que isto tem de especial? Tem algum interesse?

Na nossa opinião e de acordo com a nossa vivência, a resposta é claramente afirmativa. Se mais não fosse, a prova foi o facto de os alunos mais tarde, ao longo deste estudo, ao sentirem os seus colegas por vezes confundidos, recorrerem ao exemplo do que tinham feito neste programa para esclarecer os outros. Esta nossa posição vem, aliás, de encontro ao que Fey (1989) afirma, ao referir-se a um série de projectos de desenvolvimento orientados por Leitzel e Demana (1988) no sentido de analisar os efeitos do uso de diferentes instrumentos de cálculo numérico na transição do raciocínio aritmético para o algébrico: "A estratégia básica é valorizar a procura de modelos em tabelas de valores, para variáveis numéricas relacionadas, como um primeiro passo para a expressão algébrica formal dessas relações. Os resultados da investigação sugerem que esta transição para as abstracções da álgebra enriquecida por elementos computacionais é nitidamente mais eficaz do que as abordagens tradicionais" (p. 4).

Trata-se de um processo dinâmico, em que o aluno se confronta com um desafio que terá de ultrapassar, estando nele incluído um processo competitivo. Para além deste aspecto, a necessidade de apresentar a lei de transformação escrita correctamente na sua forma analítica, pois caso contrário o computador não aceita a resposta como certa, leva a que os alunos de uma forma natural se esforcem em utilizar uma linguagem matemática adequada. Por várias vezes, alguns alunos chamavam a atenção dos seus colegas de grupo para este aspecto, sendo eles próprios a atenderem a este facto ao contrário da situação, por nós todos tão conhecida, de ser o professor a impôr uma escrita correcta sem os alunos sentirem verdadeiramente a sua necessidade. Um terceiro aspecto é o de um processo deste tipo permitir ter acesso a um elevado número de exemplos diferentes na turma, o que poderá vir mais tarde a ser explorado em aula. Tal foi o que, de facto, veio a acontecer.

Nas aulas que se seguiram a esta actividade, os alunos discutiram entre si e com o professor os casos que não tinham conseguido resolver, dando por vezes origem a discussões muito interessantes. É o caso, por exemplo, de uma função cuja expressão analítica era $1/x$ e em que o computador tinha indicado, quando os alunos introduziram o zero, que tal valor não podia ser considerado. Ou ainda, no caso da função definida por $(x+1)^2$, em que o computador tinha considerado errada a resposta x^2+2x+1, por não ter sido por nós prevista aquando da elaboração do programa, e uma aluna insistir que a sua resposta estava correcta. Note-se que estes alunos ainda não tinham trabalhado com polinómios, nem com casos notáveis, explicando-se o facto da aluna ter chegado a este resultado através de cálculos do tipo já anteriormente feitos. Ao encarar a "função" como uma "caixa negra" que actuava sobre cada valor de x, compreende-se um raciocínio centrado sobre o que tinha acontecido ao x: eleva-se ao quadrado, soma-se o dobro, soma-se um.

Concluída esta fase, seguiu-se-lhe a elaboração do gráfico de algumas funções que os alunos tinham já em seu poder. Essas funções foram propostas geralmente pelo professor e foram diferentes de grupo para grupo. Quando os alunos sentiam necessidade, calculavam mais pares de valores para se aperceberem do esboço do gráfico da função. No final, foi feita a apresentação, por cada grupo, do seu trabalho, aproveitando-se para fazer uma ampla exploração dos vários gráficos, sendo possível levar a cabo um estudo comparativo.

Terminada esta sequência de aulas, foram propostas aos alunos algumas actividades, ainda para trabalho em pequenos grupos, de quatro ou cinco alunos por grupo, no sentido de continuar a exploração de gráficos e a construção do conceito de função. O recurso a situações da vida real — temperaturas, temperaturas médias, precipitação[(2)] — bem como a outras com origem dentro da própria Matemática (perímetros e áreas de quadrados e rectângulos, valores inteiros e decimais, domínio e conjunto de chegada) foi levado a cabo. Uma observação deve ser feita neste momento para melhor entendimento do que se passou. No nosso entender, as situações da vida real, quando exploradas, devem surgir de um modo significativo e consideradas em todas as suas vertentes, dando oportunidade ao aluno de conhecer as potencialidades que a Matemática nos oferece para entender o mundo que nos rodeia, não as encarando como uma mera via possível de "motivação" para o aluno. Neste sentido, e a título de exemplo, refira-se a abordagem feita do fenómeno do arrefecimento de um café. Para isso construíu-se uma tabela dos valores da temperatura em função do tempo, para o que se procedeu à leitura, de cinco em cinco minutos, na aula de duas horas, da temperatura de um café colocado numa chávena. Para segurança do processo foram utilizados dois cafés e as leituras foram feitas separadamente por dois grupos simultaneamente. Deve ser dito que esta situação tão simples levantou algumas dúvidas aos professores que tiveram que recorrer aos colegas do grupo de Química para seu esclarecimento. Foi, a partir dos dados recolhidos por eles próprios, que os alunos fizeram de seguida o respectivo gráfico e procuraram ver qual o tipo de função que se ajustava melhor ao fenómeno físico que se estivera a estudar.

Ainda de acordo com o mesmo pressuposto e considerando, como já anteriomente referido, que o estudo das funções favorece o aparecimento de actividades de modelagem, os alunos desenvolveram, com o auxílio da folha de cálculo, duas situações problemáticas surgidas a partir da vida real. Diziam ambas respeito às distâncias percorridas em função do tempo, ora por um ciclista na tentativa para bater o record da hora, ora por uma bola a deslocar-se num plano inclinado, pretendendo-se que os alunos encontrassem funções que se ajustassem tanto quanto possível aos valores experimentais que a realidade nos tinha oferecido. O aluno tinha que optar entre uma função linear ou uma quadrática e dispunha do gráfico dos pontos dados. Ao atribuir valores aos parâmetros, quer de ax+b, quer de ax^2+b, de acordo com a opção tomada, o gráfico da função obtida iria ser desenhado no mesmo referencial do já existente, podendo o aluno não só verificar se a sua escolha estava ou não próxima da desejada, assim como do tipo de variações que as suas opções iriam determinar. Deve ser dito que todos os grupos de alunos conseguiram resolver as duas questões, embora não tenha sido considerado previamente, por nós, como uma tarefa simples. Esta situação favoreceu igualmente uma discussão interessante, tendo os alunos sentido que nem sempre uma situação real tem na Matemática uma tradução exacta, mas antes uma tradução tão aproximada quanto possível.

Ao longo destas actividades e sempre que era oportuno foram sendo introduzidos termos como domínio, objectos, conjunto de chegada, contradomínio e imagens. No entanto, elas não foram encaradas como "um campo de batalha", onde alunos que não as utilizassem não pudessem prosseguir nas suas actividades. No final desta sequência, foi entregue e discutido um texto de apoio, onde estas noções foram retomadas, seguindo-se-lhe mais algumas propostas de trabalho, agora com o recurso a uma escrita mais formalizada. Mais uma vez, a análise de gráficos e a noção de função foram exploradas.

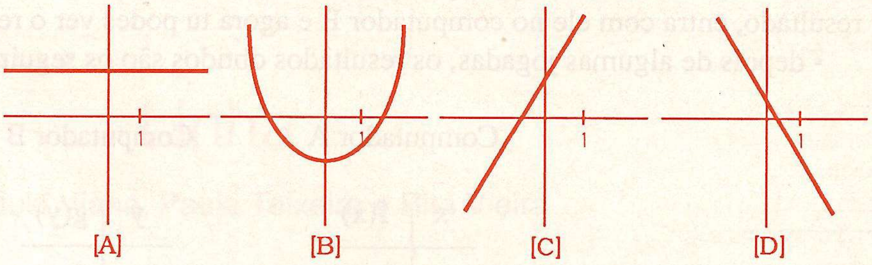
Teste de avaliação

Este estudo terminou com um teste escrito feito em duas etapas. O teste "em duas etapas" (que é o tipo de teste escrito habitual neste Projecto) é feito numa primeira fase na sala de aula em tempo limitado e, após ter sido visto e brevemente comentado pelo professor, volta ao aluno para que este desenvolva e repense as questões que desejar, em casa e num prazo pré-acordado. O teste não só tinha por objectivo determinar o que cada aluno já conseguia fazer como, do mesmo modo, avaliar o nosso próprio trabalho.

Apresentam-se, em seguida, dois exemplos ilustrativos do que foi dito.

Uma primeira questão revela, na nossa perspectiva, algumas vantagens dos alunos terem um conhecimento "amplo" e "experimental" sobre funções de vários tipos. A questão em causa aparecia com a seguinte formulação:

Observa com atenção os gráficos seguintes



a) Qual dos gráficos poderá representar a função de **Q** em **Q** definida pela expressão f(x)=3/2 x + 1? Porquê?

b) Qual é o valor de f(x) para x=3? E para x=2? E para x=0?

c) Tenta indicar expressões para as três funções de **Q** em **Q** que te pareçam corresponder aos outros três gráficos.

Debrucemo-nos, por momentos, nas respostas obtidas e no que respeita apenas à primeira alínea desta questão. As respostas dadas pelos alunos podem-se agrupar em dois grandes grupos, aquelas em que os alunos utilizaram valores numéricos e em seguida foram verificar a qual dos gráficos correspondiam os pares de valores obtidos e aquelas que, sem recorrerem a valores concretos, apresentaram uma justificação mais trabalhada, baseada no estudo sobre funções feito anteriormente. Apresenta-se, de seguida, um exemplo de cada um destes tipos de respostas:

Exemplo A:

"O gráfico que poderá representar a função Q em Q definida pela expressão f(x)= 3/2 x + 1 é o C.

Para explicar porque digo que é o gráfico C, eu faço o seguinte esquema para demonstrar o meu modo de pensar.

x	f(x)
0	1
1	2,5
2	4

e estes resultados dão para o gráfico C".

Exemplo B:

"O gráfico que poderá representar a expressão algébrica f(x)= 3/2 x + 1 é o gráfico C. Porque: o gráfico (A) corresponde a uma função onde as imagens são todas iguais, não importando qual é o objecto, o gráfico (B) por ser uma parábola por isso há-de corresponder a uma função em que o x tenha expoente par, menos outro número, que neste caso deve ser 1,25; e o gráfico (D) porque esta recta corresponde a uma função mais ou menos assim f(x)= - x + O,5 ou 1. Por isso só sobra o gráfico C que é porque a recta passa pelo ponto (O,1) ou seja, somaram-lhe 1, f(x)= 3/2 x + 1, e os outros cálculos também são deste gráfico mas não se podem ver exactamente pois o gráfico não está numa folha de papel milimé-trico".

Uma outra questão, introduzida no teste, era para nós uma incógnita no que diz respeito à reacção dos nossos alunos. Nunca tendo sido abordada, ao longo das aulas, a noção de função composta, surgia uma questão que, recorrendo ainda ao exemplo do programa de computador já referido, estava formulada da seguinte forma:

Imagina que tu e o teu colega estão a jogar ao jogo das funções e utilizam dois computadores A e B. O jogo é assim:

• cada um dos computadores escolhe uma função, o computador A a função f e o computador B a função g, tu vais tentar descobrir quais são as funções f e g;

• vais dando números ao computador A e não vês o resultado que ele dá, o teu colega, que pode ver esse resultado, entra com ele no computador B e agora tu podes ver o resultado final.

• depois de algumas jogadas, os resultados obtidos são os seguintes:

Computador A

x	f(x)
2	.....
3	.....
0	.....

Computador B

y	g(y)
.....	6
.....	8
.....	2

a) Tenta descobrir que funções f e g foram escolhidas pelos computadores.

b) Achas que há apenas uma solução para o problema? Se não, tenta descobrir outras funções diferentes f e g que resolvam o problema.

Muitos dos alunos ultrapassaram as nossas expectativas, havendo mesmo quem tivesse escolhido uma função definida por dois ramos. Evidentemente que não a indicou recorrendo à forma normalmente utilizada, mas sim arranjando um processo por si considerado expedito. A título de exemplo, apresentam-se dois tipos de resposta.

"f(x)=2x
g(y)=y+2

resolvem o mesmo problema
f(x)=(1+x)•2
g(y)=y

f(x)=2x+2
g(y)=y ".

Outra resposta:

"f(x) = x^2;
g(y) = y + 2 quando y é par,
g(y) = y - 1 quando y é ímpar".

O facto mais notável ligado a esta resposta é que ela revela uma compreensão elevada do que é uma função, se considerarmos a idade e experiência de um aluno do 8º ano.

Antes de concluir, deve ser dito que ao apresentar-se esta abordagem sobre o estudo de funções não se tem por objectivo defender-se que é a melhor, nem tão pouco a única, mas antes que se acredita que o conhecimento do que os outros fazem leva a uma reflexão mais rica sobre a nossa própria prática. Quanto mais conhecermos das experiências dos outros, criticando-as, vendo o que de positivo e negativo cada uma delas nos apresenta, mais facilmente conseguiremos construir a nossa própria abordagem. Está longe, felizmente, o tempo de "orgulhosamente sós"!

Notas:

(1) A equipa responsável pelo Projecto MAT_{789} é constituída, para além da autora deste artigo, por Eduardo Veloso, Margarida Silva, Paula Teixeira e Paulo Abrantes.

O desenvolvimento do Projecto beneficia do financiamento da Fundação Calouste Gulbenkian.

(2) Uma das fichas com que os alunos trabalharam nesta unidade, relacionando a Matemática com alguns aspectos da realidade concreta ("Um estudo sobre o clima"), é publicada no presente número da revista, na secção "Materiais para a aula de Matemática".

Referências Bibliográficas

Demana, F & Leitzel, J. (1988). Establishing fundamental concepts through numerical problem solving. In A. F. Coxford e A. P. Shulte (Eds.), *The ideas of Algebra K-12* — 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA, USA, 61-68.

Fey, J. (1988). *Technology and Mathematics Education. A Survey of Recent Developments and Important Problems*. Conferência apresentada em Budapeste no 6º International Congress on Mathematics Education (ICME 6).

Leonor Cunha Leal
Escola Secundária de D. Pedro V
Lisboa