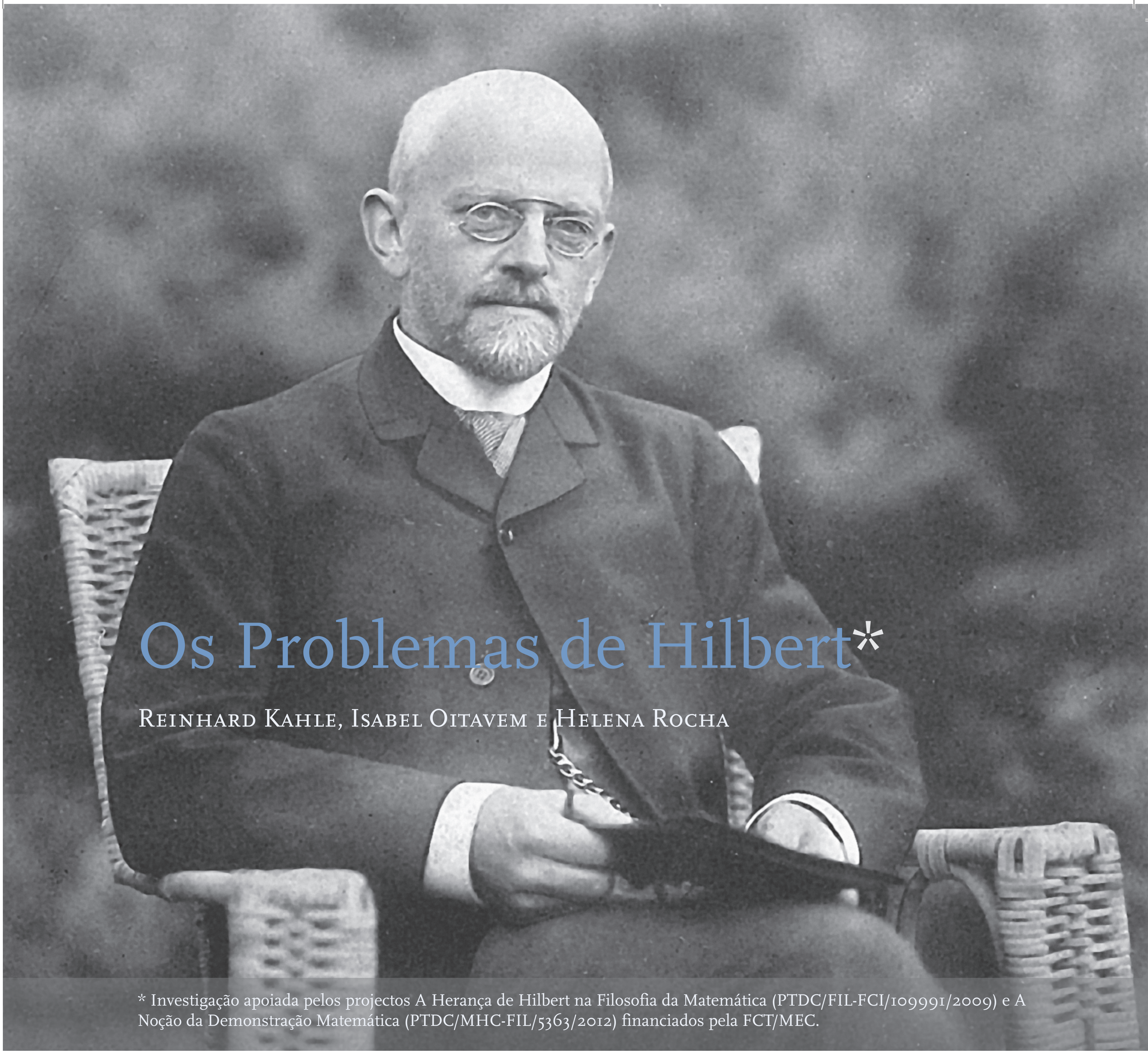


Os Problemas de Hilbert*

Reinhard Kahle, Isabel Oitavem e Helena Rocha

* Investigação apoiada pelos projectos A Herança de Hilbert na Filosofia da Matemática (PTDC/FIL-FCI/109991/2009) e A Noção da Demonstração Matemática (PTDC/MHC-FIL/5363/2012) financiados pela FCT/MEC.

O mais atrativo seria tentar antever o futuro, i.e., fazer uma identificação de problemas que os futuros matemáticos deveriam investigar. Assim podias eventualmente conseguir que ainda se falasse da tua palestra daqui a décadas.[1]

O matemático alemão David Hilbert (1862–1943) foi convidado a intervir, como um dos oradores principais, no Congresso Internacional dos Matemáticos que teve lugar em Paris, em 1900. A sugestão de apresentar uma lista de problemas que considerasse merecer a atenção dos matemáticos do novo século partiu do seu colega e amigo Hermann Minkowski (1864–1909) — ver citação acima. O impacto desta lista foi além das meras décadas previstas por Minkowski, pois hoje em dia, mais de um século depois, os Matemáticos ainda falam da palestra de Hilbert.

Hermann Minkowski

Na sua apresentação, Hilbert acentuou a importância de problemas na matemática com as seguintes palavras: «[a] grande importância de problemas específicos para o avanço da ciência matemática em geral e o seu papel para o trabalho do investigador concreto não pode ser negada. Quando um ramo da ciência oferece excesso de problemas, ele está vivo (. . .). Como na sua generalidade toda a ação humana persegue objetivos, a investigação matemática precisa de problemas. Através da resolução de problemas fortalece-se a força do investigador; ele encontra novos métodos e perspetivas, ele ganha uma visão mais abrangente e independente.» (Hilbert, 1901, p. 290)

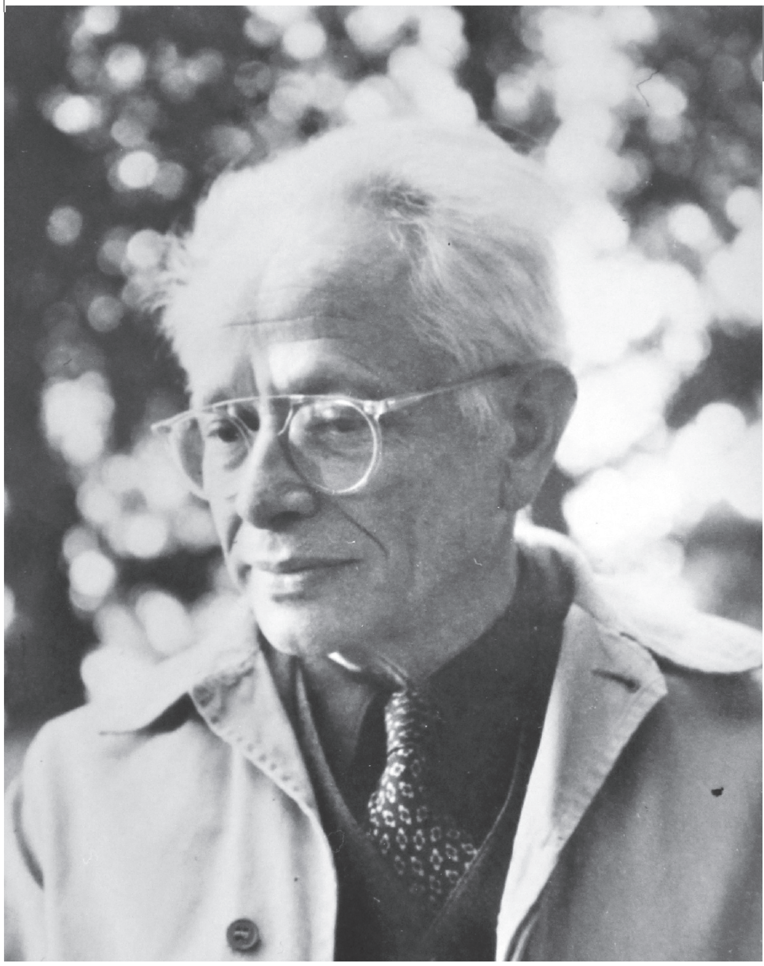
O que ficou na história como os 23 problemas de Hilbert consiste numa lista de problemas, em aberto à data, abrangendo as mais diversas áreas da matemática e que foi publicada por Hilbert (1901). Na palestra proferida em Paris, Hilbert apresentou 10 desses problemas (Grattan-Guinness, 2000). Aqui traduzimos as designações dos 10 primeiros que constam na publicação acima mencionada:

1. O problema de Cantor da cardinalidade do contínuo.[2]
2. A inexistência de contradições nos axiomas aritméticos.
3. A igualdade de volume entre dois tetraedros com a mesma área de base e a mesma altura.
4. O problema da reta como menor ligação entre dois pontos.
5. A noção de Lie de grupo de transformações contínuo sem a assumção da diferenciabilidade das funções que definem o grupo.
6. O estudo matemático dos axiomas da física.
7. Irracionalidade e transcendência de determinados números.
8. Problemas sobre números primos.
9. Demonstração da lei da reciprocidade em corpos numéricos arbitrários.
10. Decisão da solubilidade de equações diofantinas.

A lista continua com problemas de praticamente todas as áreas da Matemática, alguns mais específicos, outros mais gerais,[3] e o seu sucesso foi imediato. Em 1900, no próprio ano em que foi apresentada, Max Dehn (1878–1952), um aluno de doutoramento de Hilbert, resolveu o terceiro problema. Outros problemas, como a hipótese de Riemann (incluída no problema 8), permanecem em aberto até aos nossos dias. Para outros ainda, veio a verificar-se que, tal como Hilbert os formulou, não são passíveis de uma solução definitiva. Porém todos inspiraram o desenvolvimento matemático durante o século XX (e depois), ver por exemplo Browder (1976). Por isso, esta intervenção de Hilbert é ainda hoje considerada como «provavelmente a mais importante apresentação de sempre num Congresso Internacional dos Matemáticos» (Alexanderson, 2014, p. 332).

Com base em exemplos anteriores, como o problema da independência do axioma das paralelas de Euclides que levou à descoberta de geometrias não-euclideanas, Hilbert teve a convicção que a investigação dos seus (e de outros) problemas iria contribuir para o desenvolvimento/avanço da Matemática. Segundo ele, ao encontrarmos soluções, estas podem conduzir a generalizações conceptuais, valiosas para abrir novas perspetivas, mas «ainda mais importante» (Hilbert, 1901, p. 296) pode ser a perceção de que, em casos em que não conseguimos resolver o problema em geral, é preciso remetermo-nos para problemas mais simples que ainda precisem de ser investigados, conduzindo assim a especializações.

No âmbito de uma discussão atual à data, Hilbert expressou ainda na sua intervenção em Paris um especial otimismo, afirmando que todo o problema matemático tem solução (Hilbert, 1901, p. 298): «Aqui está o problema, procura a solução. Podes encontrá-la por raciocínio puro; porque em matemática não há nenhum ignorabimus!» Esta frase foi a reação acesa de Hilbert à expressão de Emil DuBois-Reymond (1818–1896) «ignoramus et ignorabimus» (ignora-



Max Dehn

mos e ignoraremos). Hilbert foi e é, por vezes, alvo de críticas em virtude deste otimismo e pelo fato de alguns dos seus problemas terem tido «não soluções» inesperadas.

Por exemplo, Kurt Gödel (1906–1978) mostrou que o segundo problema não pode ser resolvido tendo por base o contexto formal considerado por Hilbert (ver, por exemplo, Kahle, 2006).

Tais resultados de impossibilidade não são, de forma alguma, deficiências das questões de Hilbert — pelo contrário: Hilbert previu explicitamente a possibilidade de resultados «negativos», referindo os exemplos da irracionalidade de $\sqrt{2}$ na matemática da Grécia antiga, bem como a independência do axioma das paralelas. Na prática, os resultados de impossibilidade contribuíram substancialmente para uma melhor compreensão da realidade matemática, pelo que os problemas correspondentes devem ser considerados como particularmente bem sucedidos. De certa forma, provar que não existe solução é, para Hilbert, uma solução admissível.

Gostariamos agora de dar um exemplo, mencionado no contexto do primeiro problema de Hilbert, que pode ajudar a desenvolver a nossa compreensão de conceitos matemáticos, mesmo quando não resolvemos o problema.

Na segunda parte da explicação do primeiro problema, Hilbert discute uma conjetura de Cantor: os números reais podem ser *bem-ordenados*. Um conjunto diz-se *bem-ordenável* se existe uma relação de ordem nesse conjunto tal que qualquer subconjunto não vazio tem um elemento mínimo relativamente à ordem considerada (ver, por exemplo, Franco de Oliveira, 1982). Os números naturais são trivialmente bem ordenados, pela relação < usual.

Os números inteiros já não são bem ordenados com base na relação <, mas podem ser facilmente bem ordenados, se considerarmos a relação $i \prec j$, se e só se $|i| < |j|$ ou ($|i| = |j|$ e $i < j$). Esta ordem corresponde a

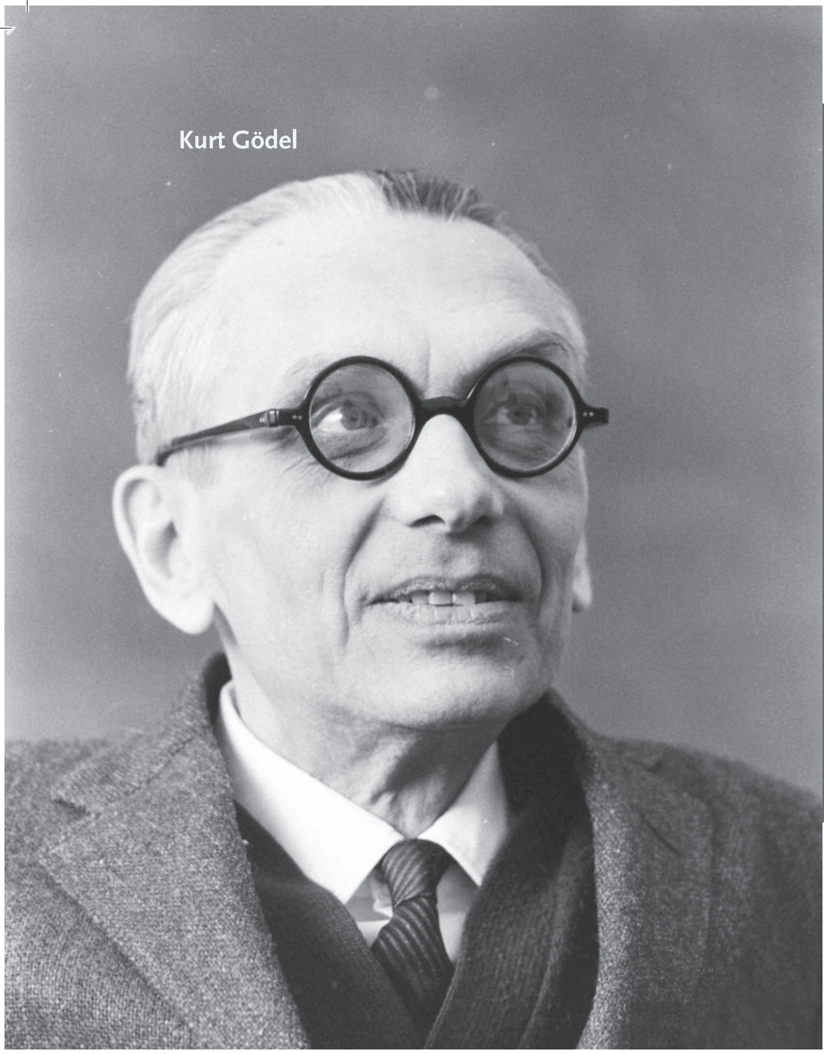
$$0 \prec -1 \prec 1 \prec -2 \prec 2 \prec \cdots$$

A conjetura de Cantor diz que o conjunto dos números reais é bem-ordenável. Porém nenhuma relação concreta que bem-ordena os números reais foi descrita por Cantor. Em 1904 Zermelo demonstrou que qualquer conjunto é bem-ordenável, usando o seu famoso *Axioma da Escolha*. Deste axioma resulta a existência de conjuntos que, em geral, não podem ser construídos de uma forma concreta. Em particular, este axioma permite provar a existência de uma boa-ordem para os números reais, mas não ajuda a construí-la.

Ainda nos anos 20 do século passado, Hilbert acreditava na possibilidade de dar uma definição concreta de uma relação que bem-ordena os números reais. Porque não? Para começar, precisamos de ser capazes de comparar quaisquer dois números reais. É possível identificar números reais com frações decimais infinitas. Formalmente, tais frações podem ser descritas por $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ (sendo n a parte inteira, e $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ os dígitos decimais).

Para comparar dois números reais $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ e $m + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \cdot 10^{-i}$ podemos tentar comparar n e m e depois, sucessivamente a_i e b_i para $i = 1, 2, \ldots$ ad infinitum. Deparamo-nos com dois problemas, ambos para o caso de igualdade: para comparar expansões decimais iguais precisamos de efetuar um número infinito de comparações; se tivermos, por exemplo, as frações decimais $1,(0)$ e $0,(9)$ (que representam o mesmo número real 1), precisamos de comparar dois conjuntos infinitos *atuais* — o de todos os a_i's e de todos os b_i's — para verificar a igualdade.

Isto não precisa de ser o fim da história, porque a matemática fornece ferramentas para estudar conjuntos infinitos *atuais* (incluindo as suas comparações). Mas para usar tais ferramentas precisamos de saber mais sobre a estrutura *interna* destes conjuntos. E aqui surge a questão chave para a compreensão da situação: como é que os a_i's de uma representação $n + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ de um número real podem ser dados? Uma resposta natural seria: por uma regra ou um programa que permita gerar ou calcular a_{i+1} a


Kurt Gödel


Georg Cantor

partir dos $a_1, \ldots, a_i$. Mas isto não pode ser; porque se os números reais fossem gerados por regras ou calculados por programas, então o conjunto dos números reais seria enumerável (porque todas as regras ou todos os programas formam conjuntos enumeráveis) e o teorema fundamental de Cantor diz-nos que o conjunto dos números reais é não-enumerável. Ou seja, existem números reais que não são computáveis (que não podem ser gerados por programas).

Afinal o problema da igualdade de números reais é intrínseco. Sabemos hoje que a igualdade de números reais não é decidível, i.e., não existem programas implementáveis em computadores que possam verificar em tempo finito para quaisquer dois números reais se estes são iguais. E com isto, também não pode existir uma boa-ordenação *concreta* dos números reais, se *concreta* implica a existência de um algoritmo que possa ser implementado num computador.

Desta reflexão simples sobre como poderíamos definir uma boa-ordenação dos números reais, ainda se pode iniciar uma nova área de questões: o que é a teoria matemática dos números computáveis, ou seja do subconjunto enumerável dos números reais que podem ser gerados (e tratados) por computadores. Esta teoria específica tornou-se, na era dos computadores, numa área importante de investigação dentro da teoria de computação.

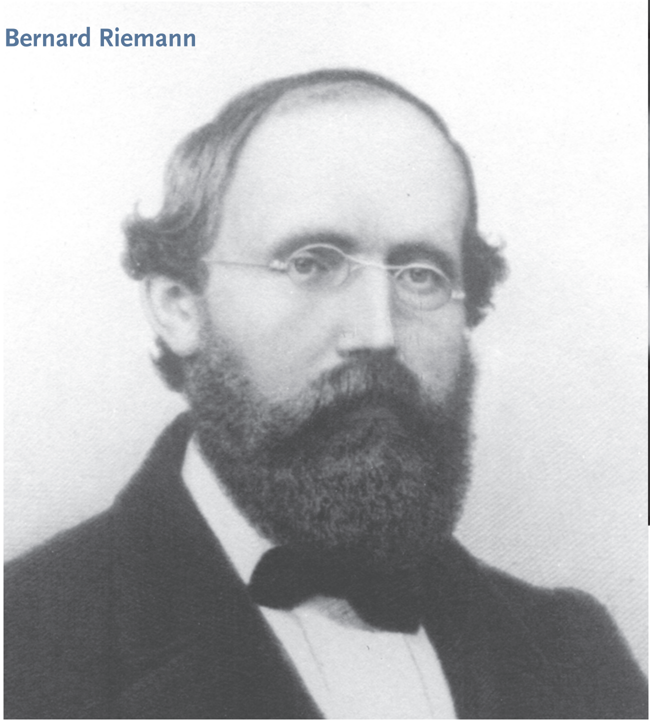
Este exemplo ilustra como nós, ainda hoje, tiramos proveito de uma reflexão sobre questões da lista de Hilbert.

Com inspiração no sucesso da lista de Hilbert, cem anos depois tentou-se reviver a ideia e desafiar a comunidade matemática com uma lista de problemas. Assim, em 2000, a Fundação Clay (uma fundação privada, sediada em Cambridge, Massachusetts, que apoia investigação matemática) publicou os sete problemas seguintes, chamados *Problemas do Prémio Millenium*:

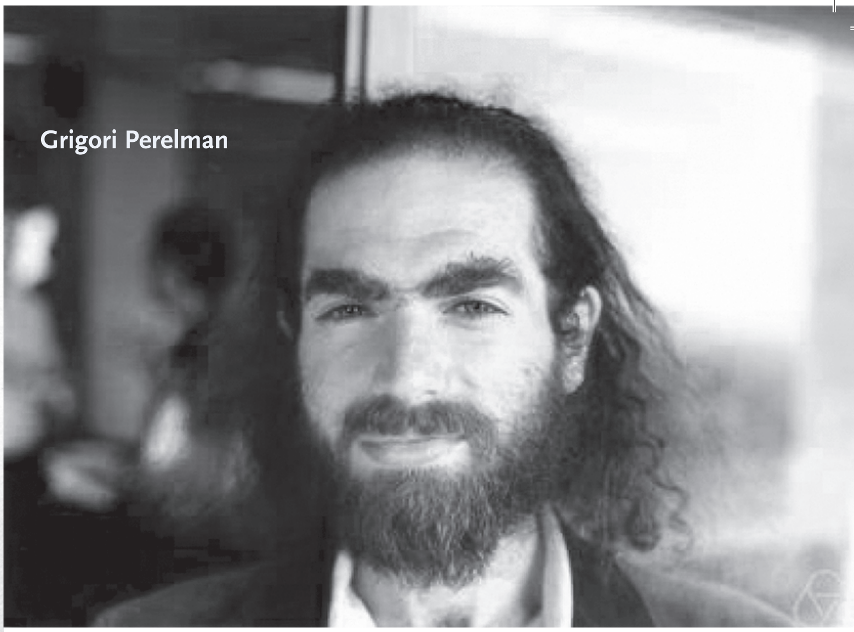
1. P versus NP.
2. A conjetura de Hodge.
3. A conjetura de Poincaré.
4. A hipótese de Riemann.
5. A existência de Yang-Mills e a falha na massa.
6. A existência e suavidade de Navier-Stokes.
7. A conjetura de Birch e Swinnerton-Dyer.

Obviamente, estes nomes são, per se, pouco esclarecedores;[4] mas note-se que a hipótese de Riemann já estava incluída — como *subproblema* — no oitavo problema de Hilbert.

Ao invés dos problemas de Hilbert, desta vez a cada problema apresentado é associado um prémio pecuniário no valor de 1.000.000 US$ (ver Precatado & Rocha, 2000). É questionável se um tal prémio é — ou deve ser — uma boa motivação para tentar resolver um destes problemas. Ironicamente, quando Grigori Perelman (nascido em 1966) re-



Bernard Riemann



Grigori Perelman

solveu um problema desta lista (o único resolvido até agora), a conjetura de Poincaré, ele declinou o prémio (aparentemente, por o ver como uma desvalorização do contributo de outros colegas na construção do caminho que depois levou à solução).

Como António Gedeão disse[5]

. . . o sonho comanda a vida,
que sempre que um homem sonha
o mundo pula e avança
como bola colorida
entre as mãos de uma criança.

Os 23 problemas de Hilbert constituiram uma pauta de sonhos para as gerações vindouras, até aos nossos dias.

Notas

1 Hermann Minkowski numa carta a David Hilbert, Zurique, 5 de janeiro de 1900 (Minkowski, 1973, p. 119f).

2 Ver também a contribuição de António Fernandes nesta revista sobre este problema.

3 A lista completa dos problemas de Hilbert, com indicações sobre o estado da arte quanto às respostas atuais a estas questões, pode ser facilmente encontrada na *internet*, quer em português quer em inglês (neste caso, com muito mais informação), nomeadamente na *wikipedia*.

4 Como aconteceu com os problemas de Hilbert, a *internet* está repleta de informações sobre estes problemas.

5 Pedra Filosofal em Movimento Perpétuo, 1956.

Referências

Alexanderson, G. (2014). About the cover: Hilbert and the Paris ICM. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **51**(2), 329–334.

Browder, F. (ed.) (1976). *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, volume 28 of *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. New Brunswick, NJ: Rutgers University.

Franco de Oliveira, A. (1982). *Teoria de Conjuntos*. Lisboa: Livraria Escolar Editora.

Grattan-Guinness, I. (2000). A sideways look at Hilbert's twenty-three problems of 1900. *Notices of the AMS*, **47**(7), 752–757. http://www.ams.org/notices/200007/fea-grattan.pdf.

Hilbert, D. (1901). Mathematische Probleme. *Archiv für Mathematik und Physik*, **3**. Reihe, 1, 44–63, 213–237. (Reimprimido em Hilbert, 1935, p. 290–329; as páginas nas citações referem a esta edição.)

Hilbert, D. (1935) *Gesammelte Abhandlungen*, Band III. Berlin: Springer.

Kahle, R. (2006). Os teoremas de incompletude de Kurt Gödel. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, **55**, 63–76.

Minkowski, H. (1973). *Briefe an David Hilbert* [Cartas a David Hilbert]. Berlin: Springer. (Editado por L. Rüdenberg e H. Zassenhaus.)

Precatado, A. & Rocha, H. (2000). Problemas matemáticos milionários. *Educação e Matemática*, **60**, 27.

Reinhard Kahle
CENTRIA CMA & Dep. de Matemática, FCT, UNL

Isabel Oitavem
CMAF, FC-UL & Dep. de Matemática, FCT, UNL

Helena Rocha
UIED & Dep. de Matemática, FCT, UNL