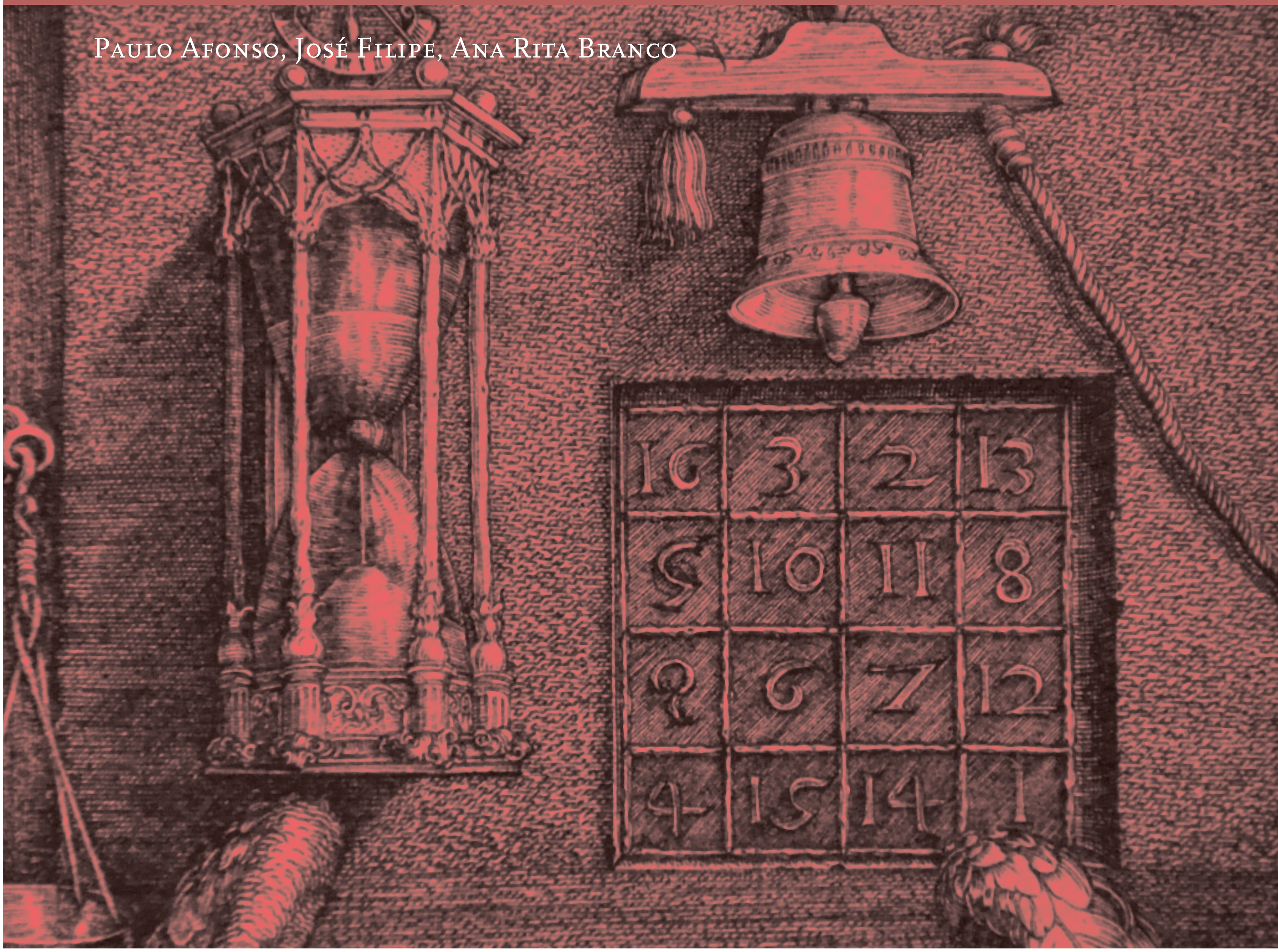
Quadrados mágicos envolvendo números figurados

Paulo Afonso, José Filipe, Ana Rita Branco



Introdução

Proporcionar aos alunos tarefas de aprendizagem que evidenciem o lado apaixonante da Matemática e que a ajudem a identificar como ciência suscetível de provocar nos estudantes a vontade de se assumirem como «pequenos» investigadores matemáticos, é algo que qualquer professor deseja conseguir.

Sentir nos alunos o prazer da descoberta e o sentimento de vitória, faz com que qualquer professor fique orgulhoso do seu desempenho profissional. Desenvolver nos alunos o sentido investigativo, intuitivo e indagador, é um dos principais papéis que se exige ao professor de Matemática destes tempos modernos. Por isso, a conceção de boas tarefas de aprendizagem é algo que deve merecer a máxima atenção nos momentos que os docentes têm para a planificação da sua atividade de ensino. Tanto quanto possível, essas tarefas deveriam deixar transparecer a vertente conectiva da Matemática, em que os conteúdos se interligam entre si.

2	36	3
9	6	4
12	1	18

3	144	4
16	12	9
36	1	48

4	400	5
25	20	16
80	1	100

Figura 1

5		6
36		25
	1	

Figura 2

5	900	6
36	30	25
	1	

Figura 3

A Tarefa

A título de exemplo, uma dessas possíveis tarefas passa por se desafiar os alunos a tentarem identificar algo de comum em três conjuntos numéricos, no sentido de conseguirem arranjar fundamento para serem, eles próprios, a propor o próximo conjunto numérico que dê continuidade aos anteriores (figura 1).

Possível exploração ao nível o 1.° ciclo, com base em padrões e regularidades

Sem qualquer tipo de ajuda, seria muito interessante ouvir as sugestões dos alunos do 1.° ciclo do ensino básico, designadamente as suas justificações ou argumentações. Com isso estar-se-ia a promover, certamente, a comunicação matemática dos intervenientes.

Nas abordagens que eventualmente surjam, é bem provável que, face à análise dos três conjuntos numéricos apresentados, se proponha o valor 1 para colocar na quadrícula central da linha inferior.

Por sua vez, analisando-se os valores das quadrículas extremas da linha de topo dos três quadrados, poder-se-á constatar a seguinte regularidade (2, 3 — quadrado da esquerda), (3, 4 — quadrado do meio) e (4, 5 — quadrado da direita). Logo, é possível que sejam propostos para o novo quadrado os valores 5 e 6.

Se a atenção recair na linha central e nos respetivos valores extremos, é bem provável que os alunos identifiquem a presença de números quadrados. Assim, na do quadrado da esquerda tem-se 4 (2^2 ou 2×2) e 9 (3^2 ou 3×3). Já no quadrado do meio existem os seguintes números quadrados; 9 (3^2 ou 3×3) e 16 (4^2 ou 4×4). Por sua vez, no quadrado da direita existem os valores 16 (4^2 ou 4×4) e 25 (5^2 ou 5×5). Logo, se esta regularidade for identificada, é bem provável que para o novo quadrado se proponham os seguintes números quadrados: 25 (5^2 ou 5×5) e 36 (6^2 ou 6×6).

Assim sendo, eis como já estaria o novo quadrado (ver figura 2).

Tentemos, agora, conjeturar acerca de qual será o valor central deste novo quadrado. Para tal, voltemos a analisar os três quadrados que estão a servir de base investigativa. Note-se que, para cada um, o valor central coincide com o produto dos valores colocados nos extremos da respetiva linha de topo:

a) $6 = 2 \times 3$ b) $12 = 3 \times 4$ c) $20 = 4 \times 5$

Constata-se, então, que cada número central é um número oblongo, pois resulta do produto de dois números inteiros consecutivos. Assim sendo, é desejável que se avance para o valor central do novo quadrado o produto de 5 por 6, isto é, o valor 30.

De seguida, o número a investigar deverá ser o que se deve colocar na quadrícula central da linha do topo. Ora, atendendo aos três quadrados iniciais, esse valor coincide sempre com o quadrado do valor central:

a) $36 = 6^2$ ou 6×6 b) $144 = 12^2$ ou 12×12
c) $400 = 20^2$ ou 20×20

Assim sendo, será espectável que o valor dessa posição, seja o quadrado do respetivo valor central (30), ou seja, 900. Logo, a figura **3** estará quase terminada.

Restam, pois, dois números para que o novo quadrado fique completo. Centremo-nos na quadrícula respeitante ao canto inferior esquerdo dos três quadrados dados. Certamente que será fácil observar-se que, em cada, o valor presente nessa posição relaciona-se sempre com o respetivo valor central. No primeiro caso é o dobro, no quadrado do meio é o triplo e no quadrado da direita é o quádruplo. De facto:

a) **12** = 2×6 b) **36** = 3×12 c) **80** = 4×20

Logo, é expectável que se proponha o quíntuplo do valor central para o caso do novo quadrado. Assim, $5 \times 30 = 150$.

Resta, pois o valor do canto inferior direito. Ora, fazendo uma análise semelhante à que se acabou de fazer, constata-se que no caso do quadrado da esquerda o valor des-

5	900	6
36	30	25
150	1	180

Figura 4

sa posição é o triplo do valor central (18 = 3 × 6). Por sua vez, no caso do quadrado do meio, o valor dessa posição é o quádruplo do valor central (48 = 4 × 12). Por último, o valor dessa posição no quadrado da direita é o quíntuplo do valor central (100 = 5 × 20). Logo, no caso do novo quadrado, será de prever que se proponha o sêxtuplo do valor central, isto é o valor 180, pois 180 = 6 × 30.

Outra abordagem possível para se descobrirem estes números extremos da linha inferior passaria por se constatar nos três quadrados iniciais que: (a) relativamente a cada valor do canto inferior esquerdo, este obtém-se multiplicando o valor do canto superior esquerdo pelo valor central; (b) cada valor do canto inferior direito resulta do produto do valor do canto superior direito pelo valor central.

Eis como fica a resposta ao desafio inicialmente colocado (figura 4).

Possível exploração ao nível do 2.° ciclo, com base na potenciação e na divisibilidade do número

Ao nível do 2.° ciclo do ensino básico é bem possível que os alunos avancem com outros tipos de abordagem ao desafio colocado.

Será expectável que alguém constate que na figura da esquerda existe esta curiosidade matemática: (2 × 3) × 36 = = (1 × 6) × 36 = 216. Ora, isso poderá levar os alunos a intuir se os outros produtos também serão este valor. Vejamos:

9 × 6 × 4 = 216
12 × 1 × 18 = 216
2 × 9 × 12 = 216
3 × 4 × 18 = 216
2 × 6 × 18 = 216
3 × 6 × 12 = 216.

Confirmar-se-ia, pois, que esta figura é um quadrado mágico de produto 216. Por sua vez, o quadrado do meio também apresenta a seguinte curiosidade numérica: (3 × 4) × 144 = = (1 x 12) × 144 = 1728. Uma vez mais, esta constatação poderá levar os alunos a estimar sempre o produto 1728 para as restantes multiplicações do quadrado. Vejamos:

16 × 12 × 9 = 1728
36 × 1 × 48 = 1728
3 × 16 × 36 = 1728
4 × 9 × 48 = 1728
3 × 12 × 48 = 1728
4 × 12 × 36 = 1728

Confirmar-se-ia, pois, que se trata de um novo quadrado mágico, mas de produto 1728.

Por analogia com estes dois quadrados anteriores, também o quadrado da direita evidencia ser um quadrado mágico, com produto mágico 8000. Vejamos:

4 × 5 × 400 = 8000
1 × 20 × 400 = 8000
25 × 20 × 16 = 8000
80 × 1 × 100 = 8000
4 × 25 × 80 = 8000
5 × 16 × 100 = 8000
4 × 20 × 100 = 8000
5 × 20 × 80 = 8000

Confirma-se a conjetura de que este quadrado da direita também é um quadrado de produto mágico, que designaremos por quadrado mágico multiplicativo.

Os produtos mágicos obtidos são, pois, o 216, o 1728 e o 8000. Ora estes três valores terão certamente uma relação entre si. E, de facto, têm, pois a coluna central de cada quadrado permite que se conclua que se tratam de números cúbicos. Vejamos:

$1 \times 6 \times 36 = 6^0 \times 6^1 \times 6^2 = 6^3$
$1 \times 12 \times 24 = 12^0 \times 12^1 \times 12^2 = 12^3$
$1 \times 20 \times 400 = 20^0 \times 20^1 \times 20^2 = 20^3$

Ora, esta constatação leva a que seja fácil propor-se o próximo número cúbico para se associar ao quadrado em branco. Para tal, basta analisarem-se os valores das bases de cada potência assinalada nos três quadrados dados e ver que vão crescendo segundo um padrão ou regularidade: 6 + 6 = 12 e 12 + 8 = 20. Logo, a seguir seria 20 + 10 = 30. Isto faria com que o produto mágico do quadrado em branco fosse o cubo desse valor, isto é: 30^3, ou seja, 27000.

Restaria, agora, descobrir os valores das quadrículas dos quadrados conhecendo-se apenas o valor central (30), o valor acima dele (900) e o valor abaixo dele (1), isto é, para já estariam descobertos os três valores da coluna central.

5	900	6
36	30	25
150	1	180

Figura 5

Para se avançar com esta proposta de resolução, seria interessante perceber-se que os seis valores que faltam descobrir são, todos eles, divisores do valor 27000.

Assim, será útil decompor-se o 27000 em fatores primos, para que a partir daí se identifiquem todos os divisores daquele número. Vejamos:

$$\begin{array}{l|l} 27000 & 2 \\ 13500 & 2 \\ 6750 & 2 \\ 3375 & 3 \\ 1125 & 3 \\ 375 & 3 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, $27000 = 2^3 \times 3^3 \times 5^3$. Logo, tendo em conta cada expoente de cada potência, o conjunto dos divisores deste número é formado por 64 elementos, pois $(3 + 1) \times (3 + 1) \times (3 + 1) = 4 \times 4 \times 4 = 64$. Destes, serão utilizados os seguintes divisores para completar a figura do desafio: 5, 6, 25, 36, 160 e 180. Logo, a figura 5 fica concluída.

Note-se que na linha de topo era necessário usar os divisores 5 e 6 para que o seu produto se equivalesse ao valor 30 que existe na coluna central. Logo, em ambos os casos estar-se-ia na presença do valor 27000, pois $5 \times 6 \times 900 = 1 \times 30 \times 900 = 27000$.

Por sua vez, na linha central necessitar-se-iam dos divisores 25 e 36, pois o seu produto é 900, que a multiplicar por 30 também originaria o valor 27000.

Já na linha de baixo, os divisores necessários seriam o 150 e o 180, pois o seu produto é 27000, que a multiplicar pelo 1, mantém esse valor.

Reflexão

Esta tarefa evidencia, pois, possuir múltiplas potencialidades para incutir nos resolvedores o gosto pela matemática.

Como síntese final, seria interessante que os alunos pudessem concluir que também existe uma regularidade nos produtos mágicos em termos da potenciação utilizada, pois, como se observou atrás, trata-se sempre de números cúbicos:

$216 = 2^3 \times 3^3 = 6^3$
$1278 = 3^3 \times 4^3 = 12^3$
$8000 = 4^3 \times 5^3 = 20^3$

Por isso, confirma-se que o próximo produto mágico deveria resultar de $5^3 \times 6^3$, isto é 30^3, ou seja, o valor 27000.

Extensão

Qual a veracidade das seguintes conjeturas?

A — Um quadrado mágico multiplicativo com a configuração (ordem 3) dos que foram abordados, tem sempre como número central um número oblongo.

B — Com qualquer número cúbico é possível formar um quadrado mágico multiplicativo de ordem 3.

PAULO AFONSO
INSTITUTO POLITÉCNICO DE CASTELO BRANCO
ESCOLA SUPERIOR DE EDUCAÇÃO

JOSÉ FILIPE
AGRUPAMENTO DE ESCOLAS AMATO LUSITANO

ANA RITA BRANCO
CENTRO SOCIAL PADRES REDENTORISTAS