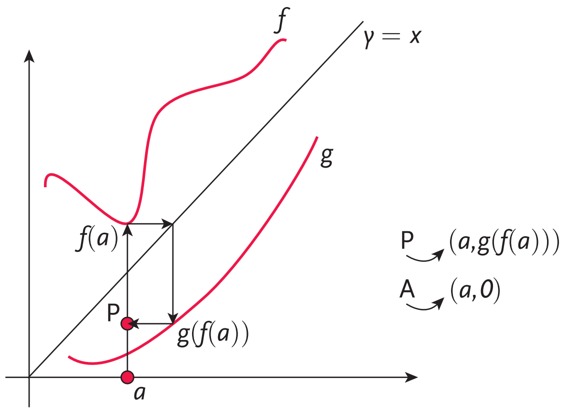
Interpretação geométrica da composição de funções

A tarefa que apresentamos nesta secção é uma das vinte e sete propostas da brochura «Problemas e investigações com tecnologia» elaborada pelo grupo T3 da APM e recentemente publicada pela Associação. A publicação apresenta enunciados e propostas de resolução, no sentido de, segundo os autores, facilitarem a aplicação em sala de aula, nomeadamente na forma de tirar partido do uso da tecnologia. Embora tenham sido concebidas para a TI-Nspire, as resoluções foram adaptadas para poderem ser usadas com qualquer outra tecnologia gráfica.

Assim, respeitando a metodologia adotada na brochura, decidiu-se por apresentar a tarefa seguida da proposta de resolução.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

O esquema seguinte mostra como se pode obter, graficamente, a imagem de um ponto P, por composição de duas funções $(g \circ f)$.



1. Considera as funções $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2}{4} - 4$.
— Representa graficamente as funções indicadas e a bissetriz dos quadrantes ímpares $y = x$.
— Marca, no eixo dos xx, o ponto genérico A, de abcissa **a**, e recria o esquema representado na figura. Confirma que, ao movimentares o ponto A, o ponto P se desloca segundo o processo indicado.

1.1. Obtém o lugar geométrico do ponto P, ao movimentares o ponto A.
1.2. Determina, analiticamente, a expressão $h(x) = (g \circ f)\ (x)$, representa-a graficamente e confirma que o gráfico coincide com o traçado geométrico do ponto P.

2. Considerando a função $f(x) = 2x + 2$, qual será a expressão da função $j(x) = (f \circ f)\ (x)$?
Adapta o esquema gráfico a esta nova situação.

3. Se a função f for representada pela expressão $f(x) = \frac{1}{x}$, qual será o gráfico correspondente a $j(x) = (f \circ f)\ (x)$?
Terias que impor alguma restrição ao gráfico obtido através da tua construção?

4. No caso de $m(x) = (f \circ f \circ f)\ (x)$, como adaptarias o teu esquema gráfico a esta nova situação?
Aplica a nova construção, à função $m(x)$ no caso em que $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$.
Confirma, analiticamente, o resultado obtido graficamente. Qual é o domínio da função $m(x)$?

5. Dada uma função f, pretende-se encontrar pontos no respectivo gráfico, denominados pontos cíclicos, tal que $f(a) = b$ e $f(b) = a$, correspondentes ao seguinte esquema:

$$a \underset{f}{\overset{f}{\rightleftarrows}} b$$

Considera a função $f(x) = x^2 - 2$. Investiga, graficamente, se existem pontos cíclicos.
No caso de existirem, determina, analiticamente, as respectivas coordenadas.

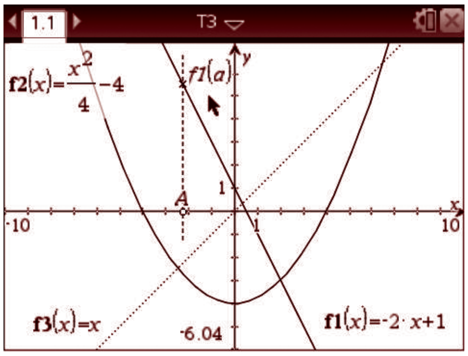
Proposta de resolução

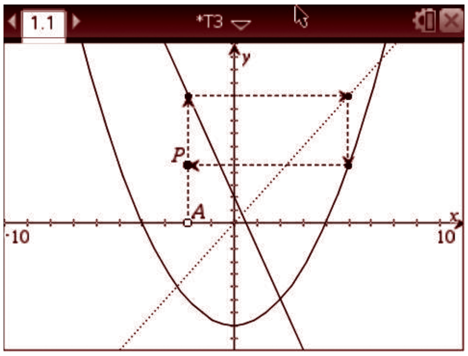
INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DA COMPOSIÇÃO DE DUAS FUNÇÕES

1.

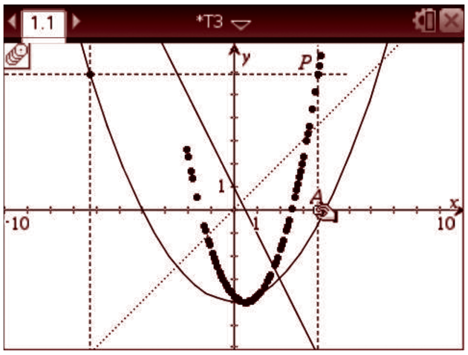
1.1. Introduzem-se as funções $f(x) = -2x + 1$ e $g(x) = \frac{x^2}{4} - 4$, a bissetriz dos quadrantes ímpares e o ponto A, genérico, pertencente ao eixo dos *xx*. Com o auxílio de retas perpendiculares aos eixos coordenados, começa-se por determinar:

- $f(a)$, imagem da abcissa do ponto A, pela função *f*;
- em seguida, projeta-se, horizontalmente, esse valor sobre a bissetriz $y = x$;
- através de uma nova projecção, agora vertical, sobre a função $g(x)$, obtém-se o valor de $g(f(a))$;
- finalmente, através de uma projecção horizontal sobre a reta vertical inicial, de abcissa **a**, obtém-se o ponto P pretendido, de coordenadas $(a, g(f(a)))$.



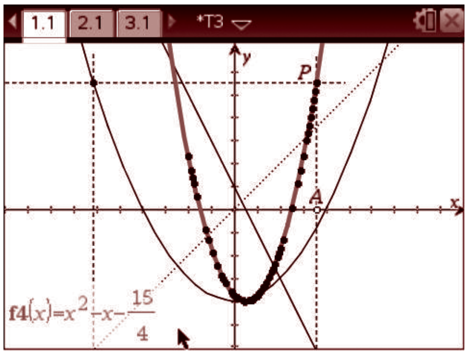


Utilizando o traçado geométrico sobre o ponto P e deslocando o ponto A, pode observar-se o lugar geométrico correspondente ao gráfico da função composta $(g \circ f)\ (x)$.



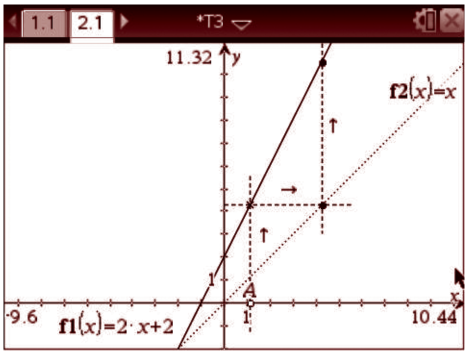
1.2. Determina-se a expressão analítica da função *h*, composta das duas funções, $g \circ f$ e compara-se o respetivo gráfico com o gráfico obtido na alínea anterior.

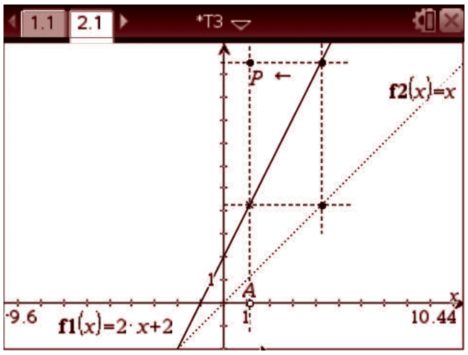
$$h(x) = (g \circ f)\ (x) = g(f(x)) = g(-2x+1) = \frac{(-2x+1)^2}{4} - 4 = x^2 - x - \frac{15}{4} \quad \text{e} \quad D_{g \circ f} = \mathbb{R}$$



Pode observar-se que os dois gráficos coincidem ponto por ponto.

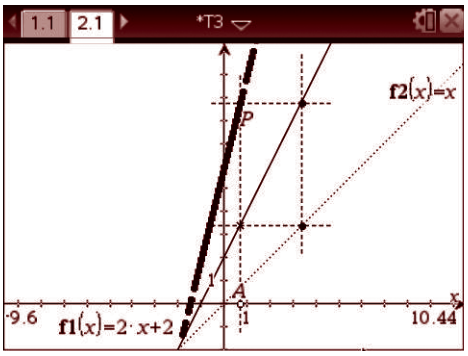
2. Começa-se por adaptar a construção anterior à nova situação:

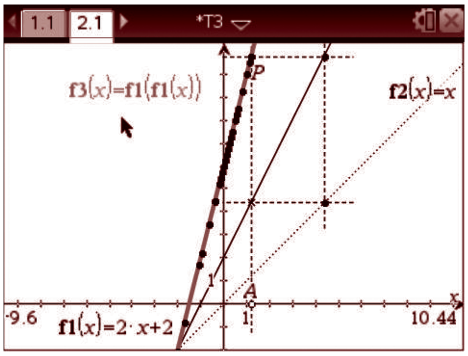




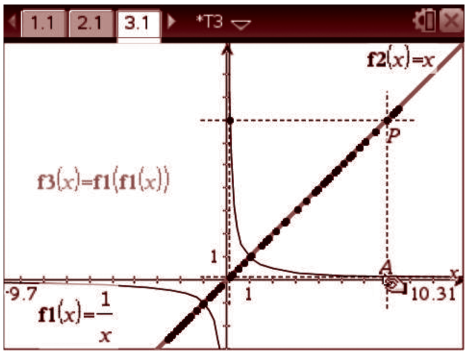
Em seguida, obtém-se a expressão analítica e comparam-se os dois gráficos, não esquecendo de analisar o domínio da função composta:

$$(f \circ f)\ (x) = f(f(x)) = f(2x+2) = 2(2x+2) + 2 = 4x + 6 \quad \text{e} \quad D_{f \circ f} = \mathbb{R}$$





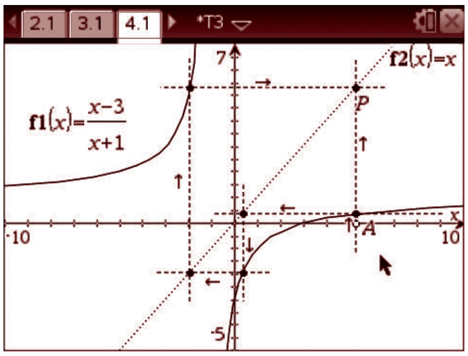
3. Alterando no esquema a função inicial, e mais uma vez com recurso ao traçado geométrico, obtém-se a representação gráfica da função composta. Neste caso, tem que atender-se ao respetivo domínio, concluindo-se que os dois gráficos não são coincidentes:

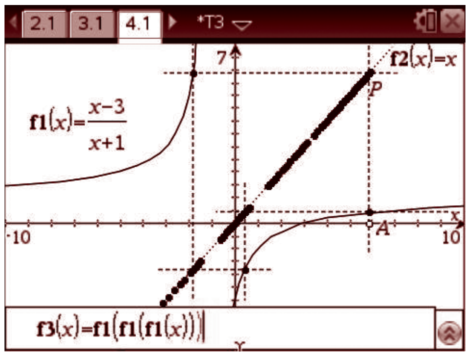


$$(f \circ f)\ (x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = x$$

$$D_{f \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in Df \wedge f(x) \in Df\} = \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

4. Mais uma vez, tem que se adaptar o esquema de construção, tornando-se desta vez, um pouco mais complicado, por ser a função composta de três funções coincidentes:





Analiticamente:

$$(f \circ f \circ f)\ (x) = f(f(f(x))) = f\left(f\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\right) = f\left(\frac{-x-3}{x-1}\right) = \frac{\frac{-x-3}{x-1} - 3}{\frac{-x-3}{x-1} + 1} = x$$

e

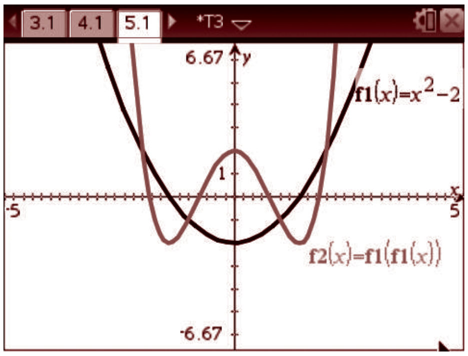
$$D_{f \circ f \circ f} = \{x \in \mathbb{R}: x \in Df \wedge f(x) \in Df \wedge f(f(x)) \in Df\} = \mathbb{R} \backslash \{-1, 1\}$$

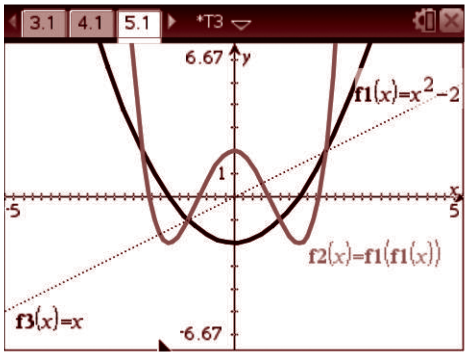
A partir do domínio da função composta, conclui-se que não há coincidência dos dois gráficos.

5. Das condições do enunciado, pode concluir-se:

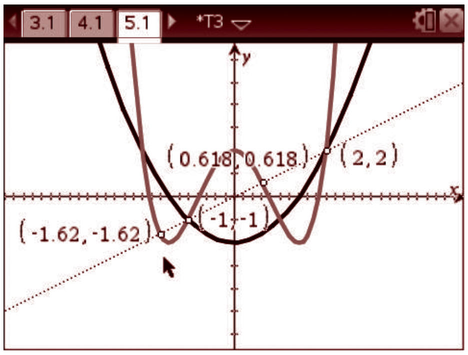
$$\begin{cases} f(a) = b \\ f(b) = a \end{cases} \Rightarrow f(f(a)) = \text{a}$$

O que facilita a obtenção gráfica dos **pontos cíclicos**, através da interseção do gráfico da função composta com a bissetriz dos quadrantes ímpares:





Conseguindo obter-se, aproximadamente, as coordenadas dos quatro pontos cíclicos desta função.



Analiticamente:

$$f(f(x)) = x \Leftrightarrow f(x^2 - 2) = x \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - 2 = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 - 2 = x \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$$

e, através do recurso à regra de Ruffini e à fórmula resolvente,

$$(x-2)(x+1)(x^2+x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 0$$

Confirmando-se, analiticamente, os quatro pontos cíclicos, bem como os valores aproximados obtidos graficamente.