O conceito de função no currículo de Matemática

João Pedro da Ponte

Neste artigo apresentam-se alguns dos aspectos mais salientes da história e da natureza do conceito de função, bem como das suas ligações com as outras ciências e da sua utilização para o estudo de situações da realidade. O problema do seu enquadramento didáctico é equacionado em termos da natureza e generalidade do conceito, das suas formas de representação e do tipo de actividades a desenvolver pelos alunos, discutindo-se ainda as implicações derivadas da moderna tecnologia.

Diversos ramos da Matemática lidam directa ou indirectamente com funções: na Análise Infinitesimal consideram-se funções de uma, duas, três ou **n** variáveis, estudando-se as suas propriedades bem como as das suas derivadas; nas teorias de equações diferenciais e integrais procura-se resolver equações cujas soluções são funções; na Análise Funcional trabalha-se com espaços cujos objectos são funções; na Análise Numérica estudam-se os processos de controlar os erros na avaliação de funções dos mais diversos tipos, etc. Outros ramos da Matemática tratam de perto com conceitos que constituem generalizações desta noção. Assim, na Álgebra consideram-se operações e relações, na Lógica estudam-se as funções recursivas.

A origem da noção de função

O conceito de função é justamente considerado um dos mais importantes de toda a Matemática. O ponto, a recta e o plano eram os elementos de base da Geometria Euclideana, a teoria dominante desde o tempo dos Gregos até à Idade Moderna. As noções de função e derivada constituem a partir de então o fundamento do Cálculo Infinitesimal, a nova teoria que acabou por se revelar capital no desenvolvimento da Matemática contemporânea.

Não se trata portanto de uma noção muito antiga. É verdade que aspectos muito simples deste conceito podem ser encontrados em épocas anteriores (eles já estão presentes, por exemplo, na mais elementar operação de contagem). É também um facto que alguns percursores se aproximaram da sua formulação moderna. Mas o seu surgimento como conceito claramente individualizado e como objecto de estudo corrente em Matemática remonta apenas aos finais do Século XVII.

A origem da noção de função confunde-se assim com os primórdios do Cálculo Infinitesimal. Ela surgia de forma um tanto confusa nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727). Este autor também usou os termos "relata quantitas" para designar variável dependente e "genita" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.

Foi Leibniz (1646-1716) quem primeiro usou o termo "função" (em 1673), mas ainda apenas para designar, em termos muito gerais, a dependência duma curva de quantidades geométricas como as subtangentes e subnormais. Introduziu igualmente a terminologia de "constante", "variável" e "parâmetro".

Com o desenvolvimento do estudo de curvas por meios algébricos, tornou-se indispensável um termo para representar quantidades dependentes de alguma variável por meio duma expressão analítica. Com esse propósito, a palavra "função" foi adoptada na correspondência trocada entre 1694 e 1698 por Leibniz e João Bernoulli (1667-1748).

O termo "função" não aparecia ainda num léxico matemático surgido em 1716. Mas dois anos mais tarde João Bernoulli publicou um artigo, que viria a ter grande divulgação, contendo a sua definição de função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes. Um retoque final nesta definição viria a ser dado em 1748 por Euler (1707-1783) — um antigo aluno de Bernoulli — substituindo o termo "quantidade" por "expressão analitica".

A noção de função era assim identificada na prática com a de expressão analítica, situação que haveria de vigorar pelos Séculos XVIII e XIX, apesar de cedo se perceber que conduzia a diversas incoerências e limitações (de facto, uma mesma função pode ser representada por diversas expressões analíticas diferentes!).

Esta noção, associada às noções de continuidade e de desenvolvimento em série, conheceu sucessivas ampliações e clarificações, que lhe alteraram profundamente a sua natureza e significado.

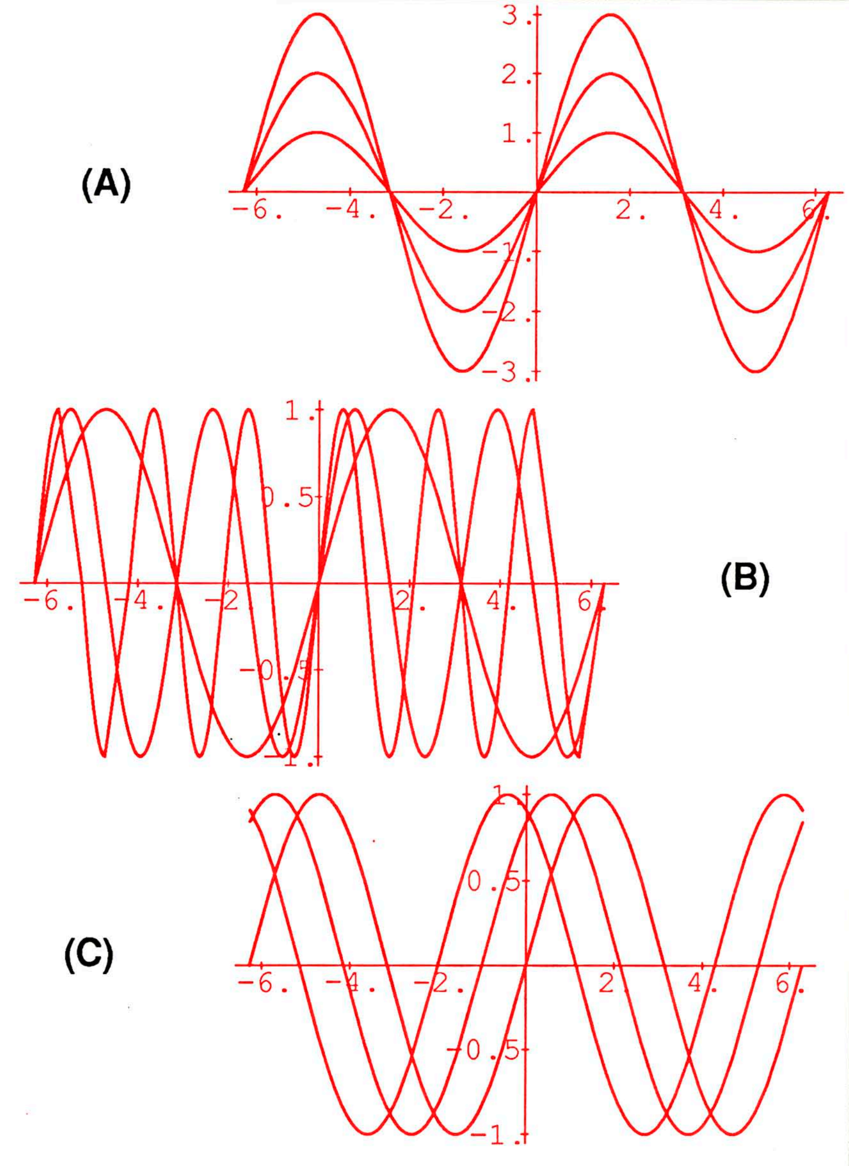
Um dos momentos mais marcantes desta evolução resultou dos trabalhos de Fourier (1768-1830), que se ocupava dos problemas da condução do calor nos objectos materiais, considerando a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis, o tempo e o espaço. Fourier conjecturou a certa altura que para qualquer função seria possível obter um desenvolvimento em série trigonométrica, num intervalo apropriado, mas não deu uma prova matemática dessa afirmação. O problema viria a ser retomado por Dirichlet (1805-1859), que formulou as condições suficientes para representabilidade duma função por uma série de Fourier. Dirichlet separou então o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o em termos de correspondência arbitrária entre conjuntos numéricos (em 1837). Uma função seria simplesmente uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.

Finalmente, com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função acabaria por ser estendida já no Século XX de forma a incluir tudo o que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

Trata-se de uma evolução que ainda não parou. Da noção de correpondência passou-se à noção de relação. Um parente próximo da ideia de função constitui um conceito primitivo da Teoria das Categorias. Na Teoria da Computabilidade (por exemplo, no Cálculo-λ), encara-se uma função já não como uma relação mas como uma regra de cálculo.

Começando por designar correspondências entre objectos de natureza geométrica, a ideia de função impôs-se através da sua associação ao estudo das expressões analíticas, ideia que se viria a revelar extremamente fecunda (e que continua na prática a impregnar a nossa linguagem actual). Ao indicar o papel histórico da fase em que a noção de função esteve na prática confundida com a de expressão analítica, o matemático soviético Youschkevitch (1976) comentou:

> "Foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a Matemática e, por causa da sua extraordinária eficiência, reservou um lugar central para a noção de função em todas as ciências exactas."



Já existem vários programas de computador que permitem sobrepor gráficos de duas ou mais funções, o que facilita, por exemplo, o estudo da influência dos vários parâmetros numa família de funções. Os gráficos desta figura representam funções da família **y=asen(wt+b)**. Em **A)** podem ver-se os gráficos de **y=sen(t)**, **y=2sen(t)** e **y=3sen(t)**, em **B)** os de **y=sen(t)**, **y=sen(2t)** e **y=sen(3t)**, e em **C)** representámos os gráficos de **y=sen(t)**, **y=sen(t+1)** e de **y=sen(t+2)**.

A noção de função e a realidade física

A noção de função não apareceu por acaso na Matemática. Ela surgiu, como tão bem mostrou Bento Caraça (1951), como o instrumento matemático indispensável para o estudo quantitativo dos fenómenos naturais, iniciado por Galileu (1564-1642) e Kepler (1571-1630). O seu desenvolvimento apoiou-se nas possibilidades expressivas proporcionadas pela criação da moderna notação algébrica por Viète (1540-1603), e, muito em especial, da Geometria Analítica, por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601--1665).

Reagindo às tradições verbalistas e redundantes da escolástica medieval, Galileu sublinhava ser a Matemática a linguagem apropriada para estudar a natureza. Era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem tanto quanto possível uma descrição matemática simples. O estudo do movimento da queda dos graves, do movimento dos planetas, e em geral, dos movimentos curvilíneos, conduziram à necessidade de considerar as funções de proporcionalidade directa e inversa, bem como as funções polinomiais (incluindo as cónicas) e as trigonométricas.

A Matemática e a Física estavam nesta altura estreitamente ligadas entre si. Um dos maiores matemáticos de todos os tempos, Newton, seria simultaneamente um físico proeminente. Muitos outros matemáticos como Bernoulli, Euler, Lagrange, Fourier manifestaram igualmente grande interesse por problemas de ordem física.

As funções são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação. Uma dada grandeza pode variar no tempo, variar no espaço, variar segundo outras grandezas, e mesmo variar simultaneamente em diversas dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, pode desaparecer de todo, pode, em suma, obedecer às mais diversas leis ou constrangimentos.

Por exemplo, uma das descobertas mais extraordinárias de Newton, é que a lei de movimento de um corpo (em notação moderna, dada pela função **e(t)** — o espaço variando com o tempo) não tem uma relação directa com a força aplicada nesse corpo. Essa relação também não existe para a lei da velocidade (dada por **v(t)**, em que **v** é a função derivada de **e**, **de/dt**). Mas, no entanto, tal relação existe para a aceleração do corpo (dada por **a(t)**, a função segunda derivada, **dv/dt**), e é expressa por uma lei extremamente simples: **f=ma**!

A noção de função está assim associada na sua origem à noção de lei natural. A ideia de "regularidade" era um dos seus elementos constitutivos mais determinante.

Na verdade, podemos considerar três elementos essenciais na formação do primitivo conceito de função:

(a) a notação algébrica, portadora de importantes factores como a simplicidade e o rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas condensando uma grande quantidade de informação;

(b) a representação geométrica, proporcionando uma base intuitiva fundamental (de que é exemplo a associação das noções de tangente a uma curva e de derivada duma função);

(c) a ligação com os problemas concretos do mundo físico, associada à ideia de regularidade, que forneceu a motivação e o impulso fundamental do estudo.

O conceito de função acabaria por seguir uma evolução própria, afastando-se destes três elementos. Começaram a considerar-se funções às quais não corresponde qualquer expressão analítica, que não são susceptíveis de representação geométrica simples, e que não têm qualquer relação com problemas concretos do mundo físico.

Essa evolução viveu os seus momentos de dramatismo — recordemos o horror provocado pelas "funções-monstros", como as funções contínuas sem derivada em nenhum ponto, que pareciam não ter outro propósito senão roubar aos matemáticos a confiança nos seus raciocínios. Tal evolução teve como pano de fundo a procura de coerência e generalidade, mas não deixou de estar fortemente associada ao estudo de questões matemáticas significativas e interessantes.

A noção de função e os novos desenvolvimentos da Matemática

A Matemática hoje em dia já não está vinculada de forma tão exclusiva como no passado às ciências físicas. Ela viu desdobrarem-se os seus domínios de aplicação, servindo igualmente de instrumento para o estudo de fenómenos e situações das ciências da vida, das ciências humanas e sociais, da gestão, da comunicação, da engenharia e da tecnologia, constituindo um meio de descrição, explicação, previsão e controlo.

Esta aplicação da Matemática às áreas mais diversas é feita essencialmente através da noção de modelo. Um modelo matemático constitui uma representação duma dada situação, através de objectos, relações e estruturas com que se procura descrever os elementos considerados fundamentais dessa situação, ao mesmo tempo que se ignoram deliberadamente os elementos tidos como secundários. Um modelo matemático pode ter diversas formas, mas usualmente é constituído por variáveis, relações entre essas variáveis, e as respectivas taxas de variação.

O processo de construção de um modelo matemático envolve diversas etapas, podendo ser necessários vários ciclos de aperfeiçoamento sucessivo até se obter uma descrição satisfatória da situação em causa. De acordo com Niss (1987), as seguintes actividades constituem parte integrante deste processo: (a) identificar os elementos da situação que se pretende estudar; (b) selecionar os objectos, relações, etc., relevantes para este fim; (c) idealizá-los de forma apropriada para uma representação matemática; (d) escolher um universo matemático para servir de base ao modelo; (e) efectuar uma translação da situação para este universo; (f) estabelecer relações matemáticas entre os objectos traduzidos, acompanhados por hipóteses e propriedades; (g) usar métodos matemáticos para obter novos resultados e conclusões relativos ao modelo; (h) interpretar estes resultados e conclusões no quadro da situação original; (i) avaliar o modelo confrontando-o com a realidade (com dados observados ou previstos), comparando-o com outros modelos e/ou relacionando-o com conhecimentos teóricos; e (j) construindo, se necessário, um modelo novo ou modificado.

Entre os modelos matemáticos mais frequentes contam-se os sistemas dinâmicos. Nestes, as variáveis fundamentais que indicam o estado do sistema representam quantidades que podem aumentar ou diminuir ("acumulações"), tais como a distância à origem, a massa, a energia cinética, o volume de um líquido, o número de organismos vivos, etc. Equações envolvendo as taxas de variação destas quantidades regem a sua mudança no tempo.

Mas os modelos podem ser de outros tipos. Nos modelos de distribuição espacial estuda-se como diversos objectos ou quantidades se posicionam e movem no espaço. Nos modelos probabilísticos discretos temos uma série de acontecimentos ocorrendo no tempo, de acordo com determinadas funções de probabilidade. Em qualquer dos casos é sempre de grande interesse estudar os efeitos dos diversos parâmetros que influem na situação, o que se faz de forma tanto mais eficiente quanto mais próximo se está de estabelecer uma relação funcional entre cada um deles e as variáveis fundamentais do modelo.

A noção de função é por isso de importância central na concepção e no estudo de modelos, qualquer que seja a sua natureza, continuando por isso a ser uma noção-chave na Matemática actual.

As funções no currículo de Matemática

Já no início do Século XX, Felix Klein (1908-1945) argumentava que a noção de função devia estar presente em todo o ensino da Matemática, a nível secundário. No entanto, e apesar da sua importância nunca ter sido posta em causa, as funções têm tido por vezes um lugar subordinado e modesto nos currículos de Matemática.

O papel curricular do conceito de função pode ser visto tendo em conta três aspectos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências.

De facto, há duas formas distintas de conceber o estudo da álgebra elementar. Numa, a prioridade é dada às equações e expressões designatórias. Noutra, a prioridade é dada à noção de função e à sua representação gráfica. Aparentemente, pouco divergem. Através de ambas se dá praticamente a mesma matéria. Mas a verdade é que se tratam de caminhos muito distintos, privilegiando o primeiro os aspectos simbólicos e formais e o segundo os aspectos intuitivos e relacionais.

Outra questão importante tem a ver com a maior ou menor generalidade da definição que se adopta e, muito especialmente, com que se trabalha (na verdade, estas nem sempre coincidem!). Privilegiam-se as funções numéricas ou procura-se fazer uma abordagem em termos mais gerais, envolvendo correspondências entre elementos dos mais diversos conjuntos?

Em Portugal, não se chegou a cair nos exageros cometidos noutros países, nomeadamente no período da chamada "Matemática Moderna". Houve bom senso suficiente para nunca se adoptar definições no estilo bourbakista "uma função é um conjunto de pares ordenados". O estudo das proporcionalidades directa e inversa manteve-se sempre nos programas, bem como o das funções quadráticas e trigonométricas.

Mas se entre nós as orientações seguidas se podem caracterizar pela moderação, o certo é que se têm inclinado sempre mais para a consideração do aspecto algébrico e a procura duma ampla generalidade. São disso exemplo a forma insistente como se valorizam noções como injectividade e sobrejectividade, e a importância que se dá a temas como a composição de funções, cujo tratamento, à míngua de aplicações interessantes, se torna profundamente maçador. Trata-se de noções sem dúvida importantes, mas introduzidas duma forma prematura e imprópria, sem se ter em conta se os alunos estão ou não em condições de delas poderem tirar o desejável proveito.

A preocupação em introduzir muita terminologia abstracta, que nunca chega a ser usada de forma significativa, é uma tentação frequente dos programas, não só portugueses mas também de outros países. Eventualmente ela satisfaz o sentido estético dos seus autores, que mostram assim saber bastante Matemática. Mas, se essa terminologia não constitui uma ferramenta prática para lidar com situações interessantes — exteriores ou interiores à Matemática — ela constitiu um vocabulário que meramente se memoriza sem se compreender nem valorizar.

Num aspecto a tradição portuguesa no ensino das funções tem sido particularmente pobre: na dificuldade em dar um lugar de relevo à ligação da Matemática com a realidade. Tem prevalecido a ideia de que nesta disciplina o que é preciso é que os alunos aprendam as técnicas e os algoritmos, ficando a sua aplicação às diversas situações exclusivamente a seu cargo ou, quando muito, ao cuidado dos professores das outras matérias.

De nada serviu o esforço de José Sebastião e Silva (1964a, 1964b), que nos seus "textos piloto" e "guias" discutia em profundidade numerosos exemplos e salientava a importância didáctica das aplicações. As suas recomendações não foram minimamente tidas em conta nos programas posteriores. O reconhecimento de que a capacidade dos alunos aplicarem os conceitos adquiridos é tão ou mais difícil de adquirir quanto os próprios conceitos, e que os dois processos devem seguir a par e passo, leva a concluir que estamos perante um dos aspectos mais negativos das nossas orientações curriculares.

É possível introduzir a ideia de função como relação binária logo na Escola Primária. Isto tem sido tentado duma variedade de maneiras. Uma delas, é através de diagramas sagitais. Os conjuntos em causa raramente excedem os três ou quatro elementos. O que é preciso saber é que de cada elemento do domínio sai uma e uma única seta. Outra, é a conhecida ideia da "máquina de transformação": um objecto é introduzido por um lado, originando que algo saia pelo extremo oposto. Em qualquer das formas não é difícil de apresentar as operações aritméticas usuais nos números inteiros e a sua composição. Podem-se calcular imagens de números dados, números que têm dadas imagens, e até procurar adivinhar as regras de transformação. Mas estas classes de funções não possuem quaisquer aplicações significativas nem propriedades interessantes. Trata-se apenas de versões fortemente trivializadas de um conceito matemático.

O problema da trivialização não tem solução fácil. Ele tem de ser enfrentado qualquer que seja a abordagem. É um problema muito sério porque fornece aos alunos uma imagem distorcida da Matemática. No passado traduzia-se por proporcionar um contacto limitado a uma classe muito restrita das funções: as algébricas e as transcendentes, um pequeno subconjunto das funções contínuas. De facto, na sua maioria tratava-se mesmo de funções analíticas, embora isso não chegasse a ser explorado.

Enquanto na abordagem algébrica a principal restrição tem a ver com a natureza do domínio (que é discreto, finito, e normalmente se restringe a um pequeno número de elementos), classicamente ela dizia respeito à natureza da relação funcional. Mas a organização clássica correspondia a um melhor compromisso entre a generalidade e a simplificação. Permitia seguir um processo de generalizações sucessivas, ao contrário da abordagem algébrica, cujo único mérito é fornecer desde o princípio um quadro muito geral donde podemos partir para conceitos mais restritos por um processo de sucessivas particularizações. E, o que é fundamental, é mais fácil encontrar aplicações e fazer um estudo conduzindo a propriedades interessantes para as funções numéricas clássicas do que para as relações binárias com uma condição de univocidade.

Já lá vai o tempo em que o objectivo último de qualquer programa inovador em Matemática era introduzir os conceitos mais abstractos tão cedo quanto possível, de preferência logo no Ensino Primário. Hoje, parece ser cada vez mais aceite que a noção de função deve ser introduzida, como conceito com identidade própria, no 7º ou no 8º ano de escolaridade, ou seja, no 3º Ciclo do Ensino Básico (ver, por exemplo, NCTM, 1989). A forma mais natural para o fazer será provavelmente a propósito do estudo da proporcionalidade.

Mas muitos alunos chegam a este nível de escolaridade ainda com muitas dificuldades no raciocínio abstracto. Lidar com expressões algébricas e mesmo com gráficos cartesianos não constitui para a maioria tarefa fácil. O ensino das funções deverá por isso atender à necessidade de articular de forma permanente as três formas de representação conhecidas dos alunos: o numérico, o gráfico, o algébrico.

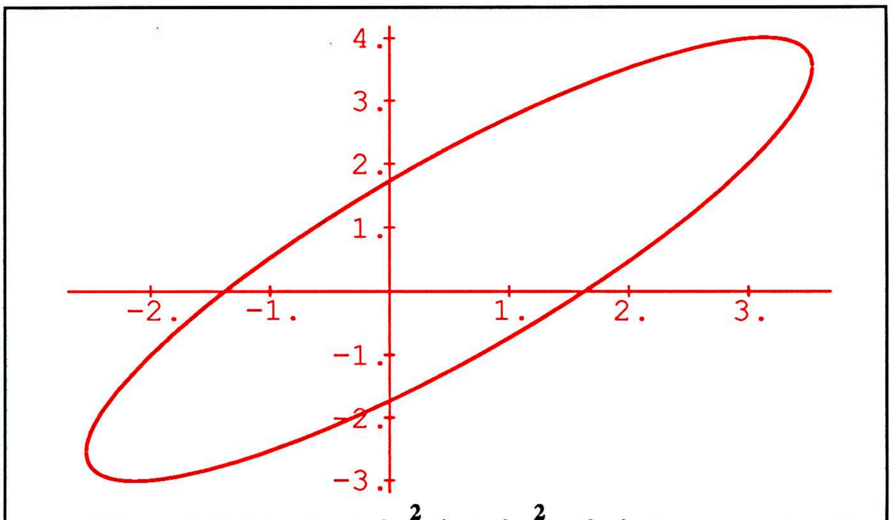
Construir tabelas, calcular valores numéricos, desenvolver um sentido do quantitativo, adquirir sensibilidade para o que são aproximações aceitáveis e inaceitáveis, são aspectos importantes da competência matemática que só podem ser desenvolvidos se se lidar correntemente e com desembaraço com números concretos (se possível, provenientes de contextos da vida real).

A interpretação de aspectos complexos dos gráficos deve ter igualmente um lugar bem estabelecido no currículo de Matemática. Ideias relacionadas com a variação (crescimento, decrescimento, constância, máximo, mínimo), e com a variação na variação (variação rápida e lenta, taxa de variação, regularidade, continuidade), são melhor apreendidas a partir de representações gráficas. Os estudantes devem ser capazes de usar estes conceitos para fazer predições, interpolar e extrapolar. Sobrepondo gráficos, devem ser capazes de relacionar diversas funções. Devem igualmente saber construir linhas de regressão que aproximem relações entre dados obtidos empiricamente e ter uma intuição para o grau de associação entre as duas variáveis.

O trabalho com expressões analíticas continua naturalmente a ser importante. Mas mais do que manejar correctamente longas e intrincadas expressões, é fundamental que os alunos compreendam o seu significado em relação a casos concretos. As fórmulas da Geometria, da Física, da Química, e das outras ciências devem ser tomadas correntemente como exemplos e exploradas nos seus diversos significados.

O estudo analítico das funções não deverá por isso ser posto de parte. Mas, em vez de se bastar a si próprio, ele deve pelo contrário surgir com base em actividades sistematicamente feitas a partir das representações numérica e gráfica. Trata-se de reforçar o desenvolvimento dos aspectos intuitivos na fase inicial do trabalho, reservando as aspectos de formalização para a segunda fase.

A noção de função, uma vez introduzida, deverá passar a aparecer cicli-



Elipse definida pela equação $4x^2 - 6xy + 3y^2 - x - 9 = 0$. A representação gráfica foi obtida pelo processo indicado na pág. 8, e utilizando o programa *Mathematica*.

camente no currículo, tratada de modo a permitir um progressivo enriquecimento e aprofundamento do conceito. Numa primeira abordagem será de considerar o estudo das funções lineares e quadráticas, tratando-se de seguida outros casos, do mais simples para o mais complexo: proporcionalidade inversa, funções em escada, funções polinomiais, funções racionais, funções dadas por expressões envolvendo radicais... Serão também de considerar funções de domínio discreto, em especial as sucessões geométricas e as definidas por recorrência. Um tratamento desenvolvido deverão igualmente ter, na devida altura, as funções trigonométricas, a exponencial e a logarítmica.

O estudo numérico, gráfico e analítico deverá estender-se a famílias de funções, como

$$y = a \operatorname{sen} (wt + b)$$

e

$$y = a \exp (wt + b)$$

Diversos instrumentos proporcionados pela moderna tecnologia podem ter um papel de grande alcance no estudo das funções, em especial, as calculadoras gráficas e os computadores que disponham de programas apropriados — traçadores de gráficos ou folhas de cálculo electrónicas. A tecnologia pode ajudar os estudantes a desenvolver uma actividade matemática mais profunda, facilitando a generalização, dando-lhes poder para resolver problemas difíceis, e fornecendo ligações concretas entre domínios tão diversos como a Geometria, a Álgebra, a Estatística, as situações reais e os modelos matemáticos associados.

Como referem Demana e Waits (1990), a tecnologia tem o potencial necessário para nos levar a mudar a maneira como trabalhamos. Estes autores sugerem também que as representações gráficas feitas em computador ou na calculadora podem encorajar a manipulação algébrica. Raízes e factores de polinómios podem ser estimados a partir de um gráfico e confirmados por processos analíticos. Treino na manipulação algébrica pode ser conseguido de forma perfeitamente natural através de interessantes actividades de representação gráfica em computador. Por exemplo, no estudo de funções racionais, a mudança expedita de escalas, levando a uma visão duma área muito maior do plano **XY** ("zoom-out"), pode ser utilizada para testar o comportamento de casos extremos, quando $|x|$ se torna muito grande, e os resultados desta exploração gráfica podem ser confirmados algebricamente usando a divisão usual de polinómios. Por outro lado, uma mudança de escalas em sentido oposto ("zoom-in"), pode servir para estudar o que se passa na vizinhança de pontos particularmente importantes: zeros, pontos de descontinuidade, de inflexão, etc. Gráficos das cónicas podem ser obtidos usando a fórmula quadrática,

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

resolvendo em ordem a y, e representando depois as duas equações resultantes. Por exemplo, para

$$4x^2-6xy+3y^2-x-9=0$$

temos:

$$y=\frac{6x+\sqrt{36x^2-12(4x^2-x-9)}}{6}$$

ou

$$y=\frac{6x-\sqrt{36x^2-12(4x^2-x-9)}}{6}$$

Conclusão

As funções estudadas na Análise Infinitesimal e usadas nas aplicações retêm no fundamental a ideia de dependência entre variáveis. As consideradas na Álgebra têm como ideia central a noção de relação. As estudadas nas Ciências da Computação valorizam os aspectos algorítmicos.

O conceito de função numérica associa duma forma natural três aspectos fundamentais da Matemática: (a) as representações analíticas, uma vez que entre as funções mais interessantes pelas suas propriedades se contam as que são dadas por uma expressão analítica simples (ou por uma expressão composta de várias expressões analíticas simples); (b) as representações gráficas, por via da Geometria Analítica; e (c) a ligação com a realidade, uma vez que tudo o que pode ser contado ou medido pode ser representado por uma função.

Embora seja possível definir função de forma muito geral, privilegiando a perspectiva da Álgebra na Matemática escolar, a verdade é que as funções numéricas gozam de propriedades elementares particularmente interessantes, têm uma representação geométrica simples e intuitiva, e descrevem de uma forma muito sugestiva situações da mais diversa natureza.

O seu estudo permite aos estudantes uma ancoragem em conhecimentos anteriores e em múltiplas representações de situações suas conhecidas. De alguma forma, estes seguem assim um percurso semelhante nas suas linhas gerais ao caminho historicamente percorrido pela comunidade matemática.

O conceito de função desenvolveu-se devido à convergência de dois factores fundamentais: uma base matemática adequada e uma forte motivação externa. Estas condições reuniram-se pela primeira vez em simultâneo no final do Século XVII. Seria certamente um erro pretender que na actualidade os estudantes precisariam de possuir exactamente a mesma base matemática e a mesma motivação. Mas a forma mais natural de construir este conceito é fazer apelo à sua relevância em função de necessidades práticas e relacioná-lo com muitas outras ideias matemáticas. As funções numéricas, aproveitando o trabalho anterior realizado na Aritmética e na Álgebra, fornecem uma nova perspectiva para olhar para noções já aprendidas e estabelecem uma ponte com a Geometria através da representação cartesiana. São por isso uma forma particularmente apropriada de introduzir esta importante noção matemática.

Pedagogicamente parece aconselhável introduzir as funções como correspondências entre conjuntos numéricos. Os exemplos "bem comportados", em que existe uma expressão analítica ou uma regra simples devem ser de todo salientados. A identificação na prática pelos alunos de função e expressão analítica, se ocorrer, não precisa de ser vista como um "grave erro". Trata-se, como nos mostra a história, de uma associação natural e fecunda, que não traz quaisquer dificuldades a um nível elementar. Os alunos que disso necessitarem terão oportunidade na devida altura de reflectir sobre esta questão e generalizar o seu conceito.

A facilidade em lidar com expressões algébricas não chega para resolver problemas reais. A tecnologia pode desempenhar um importante papel educativo, mudando o foco do ensino dos processos mecânicos e repetitivos para a compreensão da Álgebra e do Cálculo Infinitesimal como instrumentos que permitem a modelação de problemas. A tecnologia pode ser usada para realizar as manipulações ou determinar as soluções dentro dos modelos matemáticos, simplificando a parte rotineira do trabalho e proporcionando uma maior concentração naquilo que é verdadeiramente importante — a compreensão do significado dos conceitos, a elaboração e implementação de estratégias para a resolução dos problemas, e a sua análise crítica e discussão.

Bibliografia

Caraça, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (1ª edição conjunta das partes I, II e III). Lisboa: Sá da Costa.

Demana, F., & Waits, B. (1990). The Role of Technology in Teaching Mathematics. *Mathematics Teacher*, Vol. 83 (1), p. 27--31.

Klein, F. (1908/1945). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (tradução do original alemão de E. R. Hedrick & C. A. Noble). New York: Dover.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

Niss, M. (1987). *Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula*. Conferência plenária no ICMTA 3, Kassel, RFA.

Silva, J. S. (1964a). *Compêndio de Matemática* (texto piloto). Lisboa: Edição policopiada.

Silva, J. S. (1964b). *Guia para a Utilização do Compêndio de Matemática* (texto piloto). Lisboa: Edição policopiada.

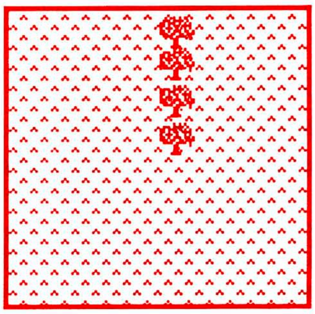
Youschkevitch, A. P. (1976). The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 16, 37-85.

João Pedro da Ponte
Departamento de Educação
Faculdade de Ciências
da Universidade de Lisboa

A herança

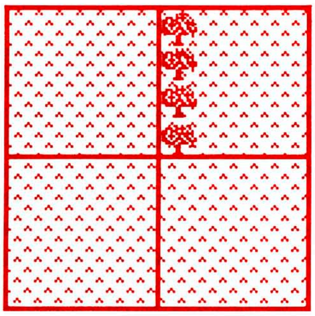
No Grupo de Discussão1do Profmat 90, foi lançado o problema "A Herança" que, a seguir, transcrevemos e, para o qual, apresentamos uma possível solução.

Um lavrador deixou aos seus quatro filhos este terreno quadrado, onde existiam quatro árvores. As suas disposições estipulavam que o terreno deveria ser dividido em quatro partes iguais, com a mesma configuração e tendo um árvore em cada uma das parcelas. Os filhos satisfizeram integralmente a vontade do pai. Como foi possível?

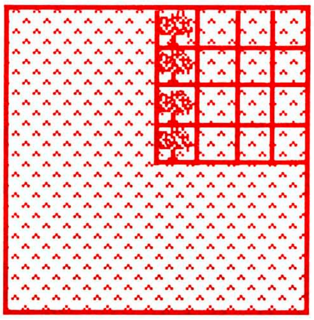


Uma proposta de solução

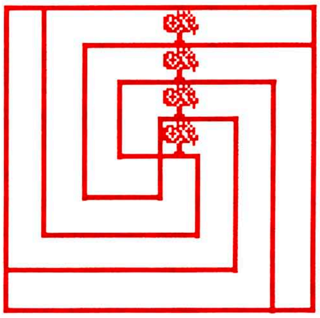
Uma estratégia possível consiste na divisão do terreno em quatro quadrados, num dos quais estão incluídas as quatro árvores.



A partir de cada um destes quadrados continua-se sempre a dividir por quatro.



Ao todo encontramos 64 quadradinhos, cabendo a cada filho 16 desses quadradinhos.



Se encontrar outra solução para este problema, partilhe-a connosco, enviando-a para a APM.

Nota: Além deste problema, foram propostos neste Grupo de Discussão mais quatro muito interessantes: "O muro", "O peixe", "O cubo" e "Os números. Caso esteja interessado em resolvê-los, poderá encontrá-los no Vol. II das Actas do Profmat 90, que será publicado em breve.

Lurdes Serrazina
Rosário Ribeiro