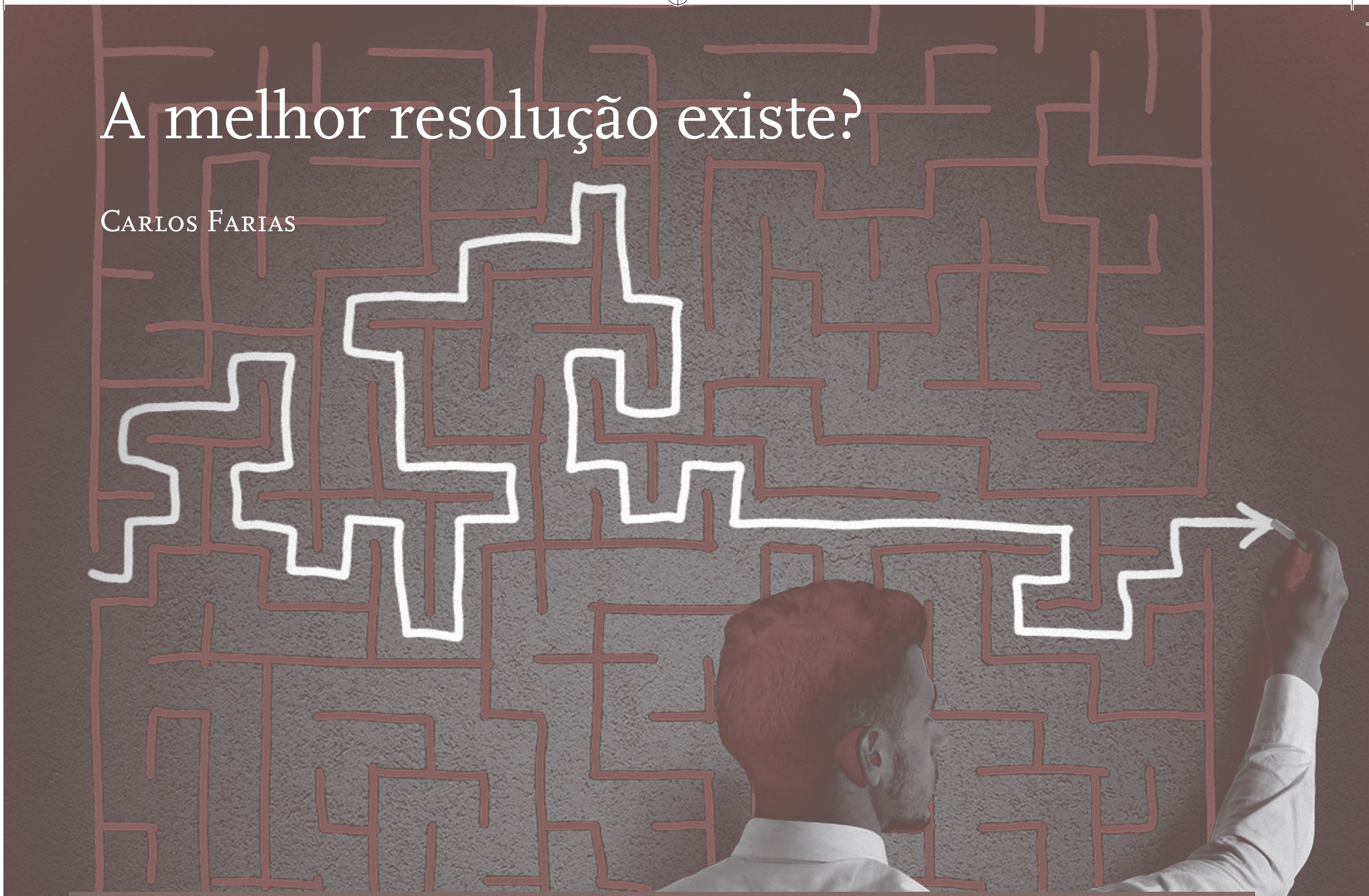
# A melhor resolução existe?

Carlos Farias



Alguns professores questionam-se sobre o motivo de o GAVE/IAVE, quanto aos exames nacionais, publicar apenas as provas e os critérios de classificação, deixando para outras instituições (sociedades científicas, associações de professores, editoras etc) o trabalho de escreverem uma resolução. É comum ouvir a resposta que, assim, o GAVE/IAVE evita a exposição e as consequentes críticas, ainda que construtivas, como a que se segue.

O Teste Nacional Intermédio (TNI) de Matemática A, ministrado no passado dia 30 de abril de 2014, em muitas escolas secundárias, aos alunos do 12.° ano, levou a algumas reflexões que agora se partilham.

Questões prévias:

A melhor resolução de um problema (de matemática) existe?

Se existe, o que deve ter a melhor resolução de um problema (de matemática)?

Qual é a melhor resolução para um problema (de matemática)?

O que nos leva a optar por determinada resolução, de um problema (de matemática), em detrimento de outras?

E se pensarmos em jogos matemáticos? Por exemplo, num problema de xadrez, o número mínimo de lances é decisivo para valorizar a resolução apresentada. Num problema de damas, se a resolução não for única, diz-se que tem dual (ou duais) e perde muito do seu valor. O mesmo se passará em problemas de bridge, go, sudoku etc.

E quanto aos problemas de matemática?

Uns dirão que a melhor resolução é a primeira que fazemos, como quase tudo na vida, a primeira vez é especial.

Outros dirão que é a mais «curta». Aqui surge outra questão: como medir o tamanho? Sim, aqui o tamanho importa. Entre uma demonstração de dez páginas e outra de duas páginas, somos levados a pensar no ambiente e imprimir a mais pequena.

E se a de duas páginas apenas for entendida por meia dúzia de sábios em todo o mundo? Há demonstrações de teoremas que estão «reservadas», no sentido de acessíveis, apenas a um escol de matemáticos e longe dos conhecimento e entendimento dos restantes.

Todos concordarão que a possibilidade de massificar o conhecimento matemático (e não só) é uma atitude nobre (apesar de perigosa para os medíocres e incompetentes), democrática e, simultaneamente, geradora de mais e melhor democracia, na senda de Bento de Jesus Caraça e muitos outros.

**1.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} 3x+1+e^{-x} & \text{se } x\leq 0 \\ \dfrac{4x+\ln x}{x} & \text{se } x>0 \end{cases}$$

**1.3.** Na Figura 2, estão representados, num referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico da função $f$, os pontos $A$ e $B$, ambos pertencentes ao gráfico de $f$, e a reta $AB$

Sabe-se que:

- a reta $AB$ é paralela à bissetriz dos quadrantes pares;
- os pontos $A$ e $B$ têm abcissas simétricas;
- a abcissa do ponto $A$ pertence ao intervalo $]0,1[$

Seja $a$ a abcissa do ponto $A$

Determine o valor de $a$, recorrendo à calculadora gráfica.

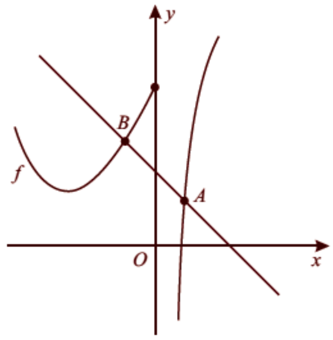



Figura 2

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- indicar o valor de $a$, com arredondamento às milésimas.

**Figura 1.** Item 1.3 do TNI de 30/04/2014.

Portanto, alguns defenderão que a melhor resolução é a que necessita de conhecimentos mais básicos e, assim, estar ao alcance de um maior número de pessoas.

Há professores para os quais as melhores resoluções são as dos seus alunos e são essas que colocam na «pedra» (nos tempos modernos, com os quadros brancos, nem se sabe como chamar a esse material). Depois se, por algum motivo, consideram pertinente analisar algum pormenor de outras resoluções feitas na componente não letiva, orientam a discussão na tentativa de se alcançar esse objetivo. Há também razões «sentimentais» para decidir por uma resolução, a preferida, por exemplo, se utilizar ferramentas do campo (ou do ramo) em relação ao qual se tem predileção. Haverá outras razões, sobre as quais não se consiga explicar o porquê dessa eleição.

Segundo Hoffmann [1], Paul Erdös dizia que «se Deus existe então deve ter um Livro com as mais belas demonstrações» e a história da matemática mostra-nos que, mesmo após a demonstração de um resultado, muitos continuam em demanda da que consta no Livro.

Pelo facto de ser oriunda do GAVE/IAVE, uma resolução não tem que vir diretamente do Livro, como alguns que trabalham diariamente com matemática consideram e que só pode gerar alguma inquietação.

Como dito no início, isto vem a propósito do TNI de 30 de abril de 2014.

Analisemos alguns dos seus itens e respetivas resoluções.

No Grupo II, temos o item 1.3 (Figura 1), cujos Critérios Específicos de Classificação se apresentam na Figura 2.

A resolução que o GAVE/IAVE apresentou para o item 1.3 é a que consta da figura 3.

| | |
|---|---|
| **1.3.** | **20 pontos** |
| Identificar o declive da reta $AB$ | 2 pontos |
| Apresentar, em função de $a$, a ordenada do ponto $A$ | 2 pontos |
| Apresentar, em função de $a$, as coordenadas do ponto $B$ | 2 pontos |
| Determinar, em função de $a$, o declive da reta $AB$ | 4 pontos |
| Equacionar o problema | 4 pontos |
| Reproduzir o(s) gráfico(s) visualizado(s) na calculadora | 3 pontos |
| Indicar o valor pedido | 3 pontos |

**1.3.** Como a reta $AB$ é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, o seu declive é igual a $-1$

Tem-se: $f(a)=\dfrac{4a+\ln a}{a}=4+\dfrac{\ln a}{a}$ e $f(-a)=-3a+1+e^{a}$, pelo que o ponto $A$ tem coordenadas $\left(a,4+\dfrac{\ln a}{a}\right)$ e o ponto $B$ tem coordenadas $(-a,-3a+1+e^{a})$

Portanto, o declive da reta $AB$ é dado por $\dfrac{4+\frac{\ln a}{a}-(-3a+1+e^{a})}{a-(-a)}=\dfrac{3+\frac{\ln a}{a}+3a-e^{a}}{2a}$

Assim, a solução da equação $\dfrac{3+\frac{\ln x}{x}+3x-e^{x}}{2x}=-1$, no intervalo $]0,1[$, é o valor de $a$

Ora, $\dfrac{3+\frac{\ln x}{x}+3x-e^{x}}{2x}=-1 \Leftrightarrow 3+\dfrac{\ln x}{x}+5x-e^{x}=0$

Para resolver esta equação, recorremos às potencialidades gráficas da calculadora.

Na figura, está representada parte do gráfico da função definida por $y=3+\dfrac{\ln x}{x}+5x-e^{x}$

O zero desta função, no intervalo $]0,1[$, é o valor de $a$

Conclusão: $a\approx 0{,}334$

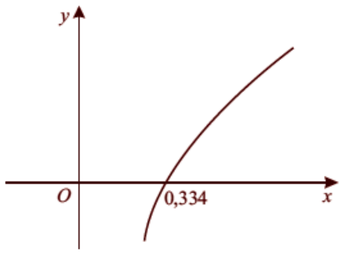



**Figura 3.** Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 1.3 do TNI de 30/04/2014.

Apresenta-se uma resolução diferente da publicada pelo GAVE/IAVE:

Os pontos $A$ e $B$ têm as seguintes coordenadas

$$(a, f(a)) \quad \text{e} \quad (-a, f(-a)),$$

respetivamente.

A reta $AB$ é dada pela equação: $y = -x + b$.

Como $A \in$ gráfico de $f$ e $A \in AB$, podemos escrever

$$f(a) = -a + b.$$

Como $B \in$ gráfico de $f$ e $B \in AB$, podemos escrever

$$f(-a) = a + b.$$

então

$$f(-a) - f(a) = 2.a$$

ou

$$f(-a) - f(a) - 2.a = 0$$

com $a \in\, ]0,1[$.

Agora, usando as capacidades gráficas da calculadora, basta determinar o zero da função

$$\begin{aligned} R(x) &= f(-x) - f(x) - 2.x \\ &= -3.x + 1 + e^{x} - \frac{4.x + \ln(x)}{x} - 2.x \end{aligned}$$

em $]0,1[$.

Não esquecendo de reproduzir o gráfico visualizado na calculadora e indicar o valor de $a$ com a precisão pedida, fica o item devidamente resolvido.

Uma opinião pessoal pode ser suspeita, por isso, foi apresentada esta resolução a vários alunos submetidos à realização deste TNI e, perentoriamente, consideraram-na mais «acessível».

Como o item solicita a utilização da calculadora gráfica, seria possível encontrar a resposta, em alguns modelos de calculadoras, quase sem efetuar cálculos no papel.

No mesmo teste, em relação ao item 4, podemos ter algo idêntico a dizer mas outros comentários urge apresentar.

Consultando o texto [2], o professor Armando Machado escreve, na página 65, o seguinte:

«O programa em vigor não exige o conhecimento destas fórmulas mas, mesmo que o exigisse, não haveria interesse em as conhecer todas de cor; bastaria conhecer uma ou duas e saber como as outras se podem deduzir facilmente delas. Parece-nos, de qualquer modo, haver interesse em que o estudante tenha conhecimento da sua existência e saiba onde as procurar no caso de necessitar de as aplicar. Destacamos por isso as quatro fórmulas obtidas:

P27. Quaisquer que sejam os ângulos generalizados $\alpha$ e $\beta$, tem-se

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$.»

**4.** Seja $g$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = \cos^2\left(\frac{x}{14}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{14}\right)$

Qual das expressões seguintes também define a função $g$?

**(A)** $\text{sen}\left(\frac{x}{7}\right)$

**(B)** $\cos\left(\frac{x}{7}\right)$

**(C)** $\text{sen}\left(\frac{x}{28}\right)$

**(D)** $\cos\left(\frac{x}{28}\right)$

**Figura 4.** Item 4, do Grupo I, do TNI de 30/04/2014.

**4.** Resposta **(B)**

Tem-se: $\cos^2\left(\frac{x}{14}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{x}{14}\right) = \cos\left(2 \times \frac{x}{14}\right) = \cos\left(\frac{x}{7}\right)$

**Figura 5.** Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 4, do Grupo I, do TNI de 30/04/2014.

Mas o programa em vigor faz referência a estas fórmulas?

Sim, em [3] encontramos a frase:

«*Poderá* aparecer, *ainda*, como aplicação do conceito de produto escalar de dois vetores a dedução da fórmula do desenvolvimento de $\cos(x - y)$.» Os itálicos não constam no original.

E ainda:

«As derivadas do seno e do co-seno *podem* ser obtidas a partir das fórmulas do seno e do co-seno da soma e de que $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = 1$». O itálico não consta no original.

Em [4], no programa que começará a ser implementado no 10.° ano, em 2015/16, podemos ler na página 24 o seguinte conteúdo para o 12.° ano:

«— Fórmulas trigonométricas da soma, da diferença e da duplicação;»

Portanto, a partir de 2017/18, não há dúvidas que estas fórmulas farão parte dos conteúdos a serem lecionados no 12.° ano.

Apesar do programa não exigir o seu conhecimento, segundo o professor Armando Machado e não só, o GAVE/IAVE há vários anos que incluiu no formulário de exame (e dos TNI), entre outras, as três fórmulas seguintes:

«Trigonometria

$\text{sen}\,(a + b) = \text{sen}\, a \ \cos b + \cos a \ \text{sen}\, b$

$\cos\,(a + b) = \cos a \ \cos b - \text{sen}\, a \ \text{sen}\, b$

$\text{tg}(a + b) = \dfrac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \ \text{tg}\, b}$»

Às vezes, pretende ainda o GAVE/IAVE que os alunos, caso necessitem, deduzam as fórmulas trigonométricas do arco duplo (ou da duplicação), fazendo nas anteriores $a = b$.

Analisando os exames nacionais do Ensino Secundário, desde 2006, e os TNI do 3.° período, desde 2008, foi detetado o recurso às fórmulas trigonométricas da duplicação nos seguintes itens:

— 6, do Grupo I, do exame da 1.ª fase de 23 de junho de 2009, 5 pontos em 200
— 3.1, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2012, 1 ponto em 200
— 3.1, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2013, 2 pontos em 200
— 4, do Grupo I, do TNI de 24 de maio de 2014, 10 pontos em 200
— 4, do Grupo II, do TNI de 24 de maio de 2014, 3 pontos em 200
— 3, do Grupo II, do exame da 2.ª fase de 21 de julho de 2014, 3 pontos em 200

Quanto à cotação da etapa onde é utilizada a fórmula, esta foi variando, como se pode ver acima.

Voltando ao TNI de 30 de abril de 2014, no Grupo I temos o item apresentado na Figura 4.

Na sua resolução vê-se claramente o objetivo deste item: testar se o aluno consegue obter a fórmula do cosseno do arco duplo, partindo da fórmula do cosseno da soma que consta do formulário.

No item 4 do Grupo II do mesmo TNI, consta a Figura 4 (ver Figura 6).

A resolução apresentada pelo GAVE/IAVE (Figura 7) recorre à utilização de mais uma fórmula trigonométrica do arco duplo, neste caso para o seno, observável nos critérios específicos (Figura 8). Uma devia ser pouco e duas não seriam demais, para incluir no mesmo teste.

**4.** Na Figura 4, está representada uma planificação de uma pirâmide quadrangular regular cujas arestas laterais medem 4

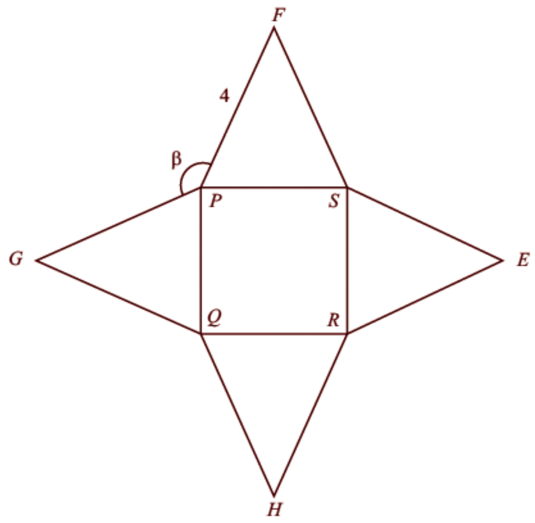



Figura 4

Seja $\beta$ a amplitude, em radianos, do ângulo $FPG$ $\left(\beta \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$

A aresta da base da pirâmide e, consequentemente, a área de cada uma das faces laterais variam em função de $\beta$

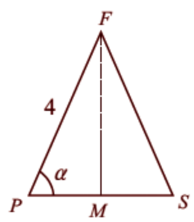
Mostre que a área lateral da pirâmide é dada, em função de $\beta$, por $-32\cos\beta$

**Sugestão** – Comece por exprimir a área de uma face lateral em função da amplitude do ângulo $FPS$, que poderá designar por $\alpha$

**Figura 6.** Item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

**4.** De acordo com a sugestão, seja $\alpha$ a amplitude do ângulo $FPS$

Seja $M$ o ponto médio de $[PS]$



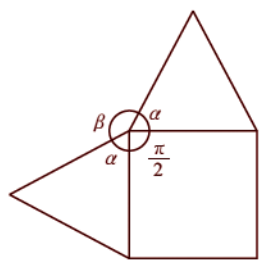

Tem-se:

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{FM}}{\overline{FP}} = \dfrac{\overline{FM}}{4}$, pelo que $\overline{FM} = 4\operatorname{sen}\alpha$

$\cos\alpha = \dfrac{\overline{PM}}{\overline{FP}} = \dfrac{\overline{PM}}{4}$, pelo que $\overline{PM} = 4\cos\alpha$

Portanto, a área do triângulo $[PSF]$ é dada por

$$\frac{\overline{PS} \times \overline{FM}}{2} = \frac{2 \times 4\cos\alpha \times 4\operatorname{sen}\alpha}{2} = 16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 8 \times 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 8\operatorname{sen}(2\alpha)$$




De acordo com a figura ao lado, tem-se $\alpha + \beta + \alpha + \frac{\pi}{2} = 2\pi$,

pelo que $2\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{3\pi}{2} - \beta$

Tem-se, então, $8\operatorname{sen}(2\alpha) = 8\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \beta\right) = -8\cos\beta$

Portanto, a área lateral da pirâmide é igual a

$4 \times (-8\cos\beta)$, ou seja, $-32\cos\beta$

**Figura 7.** Resolução publicada pelo GAVE/IAVE do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

**4.** ............................................................................................................ **20 pontos**

Escrever $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{FM}}{\overline{FP}}$, em que $M$ designa o ponto médio de $[PS]$ .............. 2 pontos

Obter $\overline{FM} = 4\operatorname{sen}\alpha$ ........................................................................ 1 ponto

...

Escrever $16\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 8\operatorname{sen}(2\alpha)$ ........................................................ 3 pontos

...

**Figura 8.** Parte dos critérios específicos de classificação do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

Apesar de haver quem trabalhe diariamente no ensino da matemática e idolatre as resoluções do GAVE/IAVE como vindas diretamente do Livro ou se tratem de pura inspiração divina, não nos devemos resignar.

Deve ser habitual os professores dizerem aos alunos: «num problema de geometria a rotação da folha pode ser decisiva».

Será que olhando para o [FPS] de outro lado, nos inspira outra resolução?

Eis outra resolução, prescindindo da rotação da figura.

$$A_{[FPS]} = \frac{4.\overline{PK}}{2} = 2.\overline{PK} = 2 \times 4.\cos\left(2.\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\text{ver }^*) = 8.\cos(\pi - \beta) = -8.\cos\beta$$

$$A_{\text{faces laterais}} = 4.A_{[FPS]} = -32.\cos\beta$$

* Como $\beta + 2.\alpha + \frac{\pi}{2} = 2.\pi$ então $2.\alpha - \frac{\pi}{2} = \pi - \beta$.

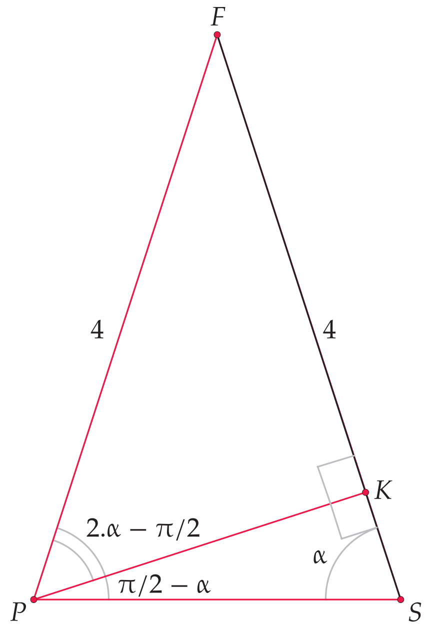



**Figura 9.** Para outra resolução do item 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014.

Singela, com 3 linhas apenas, se escreve, não a palavra «mãe», mas esta resolução que um aluno do 11.º ano devia conseguir escrever antes de comer as filhós e o peru do Natal.

A vontade de colocar um segundo item, usando fórmulas trigonométricas para o arco duplo, devia ser grande pois não permitiu vislumbrar outras resoluções. A propósito das resoluções apresentadas, foi enviado um e-mail ao sr. diretor do GAVE/IAVE, no dia 04 de maio de 2014 (quatro dias após o TNI), que se deve ter extraviado, uma vez que ainda não acusou a sua receção.

Analisemos, agora, a prova mais «fresca», o exame da segunda fase de 2014 de Matemática A, código 635, realizado em 21 de julho de 2014.

No jornal Público, de 22/07/2014, pudemos ler:

«Por último, Jaime Carvalho e Silva sustenta que a questão 1.2 (Figura 10) ‹é relativa à resolução de uma equação com números complexos que não faz parte do programa›.»

Nesse artigo apresentam o professor Jaime Carvalho e Silva como vice-presidente da APM mas, no contexto da notícia, seria importante salientar que foi o Coordenador da equipa que elaborou o programa do Ensino Secundário em vigor.

Relativamente ao item 5, do Grupo II, recordando os itens: 4, do Grupo II, do TNI de 30/04/2014 e 6 do Grupo I, do exame da 1.ª fase de 2009, seria espectável que a expressão para a área não fosse $A(\alpha) = 16.\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha$ mas sim $A(\alpha) = 8.\operatorname{sen}(2\alpha)$.

Neste item, o que terá levado, quem elaborou a prova, a evitar a utilização da fórmula do seno do arco duplo?

**1.2.** Seja $\alpha \in \left]0, \pi\right[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de $\alpha$, na forma trigonométrica.

**Figura 10.** Item 1.2, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

**3.** Na Figura 4, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

**Nota:** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$

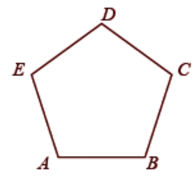



Figura 4

**Figura 11.** Item 3, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

| | |
|---|---|
| Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ ........................................ | 1 ponto |
| Escrever $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\|\overrightarrow{AD}\|} = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - \text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ (ou equivalente) ........................ | 3 pontos |
| Escrever $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) = 1 - \text{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ (ou equivalente) ........................................ | 1 ponto |

**Figura 12.** excerto dos critérios de classificação do item 3, do Grupo II, do exame da 2ª fase de 21/07/2014.

A resposta pode encontrar-se um pouco mais acima, na mesma página, lendo o item 3 (Figura 11), a intuição logo nos diz que, aqui, precisaremos da fórmula do cosseno do arco duplo.

Mostrando que $D\widehat{A}B = 2.\frac{\pi}{5}$ e usando a «desditosa» fórmula, mostra-se a igualdade pretendida.

Na Figura 12 apresemta-se parte dos Critérios Específicos de Classificação para o item 3, do Grupo II e lá estão 3 pontinhos para a utilização da fórmula do cosseno do arco duplo.

Mas não haverá uma resolução sem «sair» dos programas em vigor?

Será bom tê-la, não vá algum aluno pedir a anulação da prova, por esta conter 2 itens com conteúdos que não fazem parte do programa.

Sem pretensões de conseguir alguma resolução do Livro, analisemos a resposta que se segue para o item 3 do exame de 21/07/2014.

Na figura 13 está representado um pentágono regular [ABCDE], uma diagonal [AD] desse pentágono, a altura [EF] do [ADE] referente à base [AD] e a altura [DG] do [ABD] referente à base [AB].

Se $\overline{AB} = 1$ então $\overline{AD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Quem nunca fez esta demonstração, tem aqui um bom pretexto para fazê-la.

Daqui podemos concluir que

$$\cos(E\widehat{A}F) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

logo

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{3+\sqrt{5}}{8},$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{8} \quad \text{e} \quad 1 - 2.\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

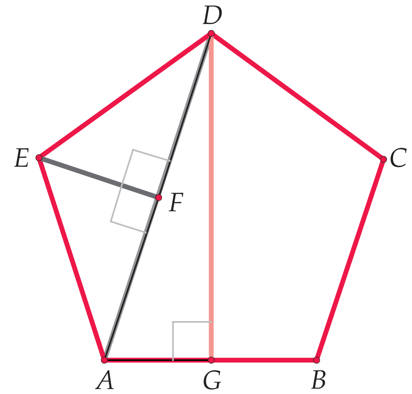



**Figura 13.** Para resolução do item 3, do Grupo II, do Exame da 2.ª fase, em 21/07/2014.

Por outro lado

$$\cos(D\widehat{A}B) = \cos(D\widehat{A}G) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Agora, a igualdade pedida é facilmente concluída, sem o uso da fórmula do cosseno do arco duplo e, apenas, com base em conteúdos lecionados até ao 10.° ano.

No primeiro Critério Geral de Classificação, o GAVE/IAVE escreve: «É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico deve ser adaptado ao processo de resolução apresentado.», a Nota 1 é: «A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.» (esta Nota surgiu em 2014, em anos anteriores os alunos puderam usar essas regras), no entanto, pela repetição dos modelos de Exames e Testes Nacionais Intermédios, bem como a insistência em certas «resoluções-tipo» e respetivos Critérios de Classificação, o GAVE/IAVE assume um papel redutor em relação ao aparecimento de resoluções diversificadas que muitos professores incentivam.

Recentemente, um estudo de investigadores da Universidade do Porto concluiu que as escolas privadas preparam melhor os alunos para os Exames mas as escolas públicas preparam-nos melhor para enfrentar as dificuldades com as quais se depararão no ensino superior. Até que ponto a formatação de exames, resoluções e critérios de classificação contribui para as conclusões desse estudo?

E que resposta dar à questão que encabeça o artigo?

A melhor resolução para um problema (de matemática) pode não existir mas é enriquecedor procurar vários pontos de vista que levem a diversas resoluções. Quanto a isto, todos devemos concordar. Ou não?

**Referências**

[1] Hoffman, Paul (1998), O Homem Que Só Gostava de Números, Gradiva, 2000.

[2] Machado, Armando (2002), Geometria 11.° Ano, Texto destinado aos professores, Versão de 01/08/2002, Elaborado para o projeto REANIMAT — Projecto Gulbenkian de Reanimação Científica da Matemática no Ensino Secundário.

[3] Programa de Matemática A — 11.° ANO, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Autores: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Maria Graziela Fonseca, Arsélio Almeida Martins, Cristina Maria Cruchinho da Fonseca, Ilda Maria Couto Lopes. Homologação: 01/04/2002. Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.

Programa de Matemática A — 12.° ANO, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Autores: Jaime Carvalho e Silva (Coordenador), Maria Graziela Fonseca, Arsélio Almeida Martins, Cristina Maria Cruchinho da Fonseca, Ilda Maria Couto Lopes. Homologação: 17/05/2002. Ministério da Educação — Departamento do Ensino Secundário.

[4] Programa e Metas Curriculares de Matemática A, Ensino Secundário, Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas. Ministério da Educação. «O calendário de aplicação deste Programa está definido no Despacho n.° 159717/2012, de 14 de dezembro, estando prevista para o ano letivo 2015–16 a sua implementação no 10.° ano de escolaridade, prosseguindo nos anos seguintes para os 11.° e 12.° anos de escolaridade.»

Carlos Farias
Escola Secundária Quinta das Palmeiras