O pensamento algébrico e as representações

Laura Bandarra Pinto

Neste artigo, descrevo uma aula realizada, no ano lectivo 2012/2013, no 2.º período, numa turma de 9.º ano de escolaridade, durante a abordagem do tema *Números e Operações*. Analiso as representações utilizadas pelos alunos para explicitar e generalizar os seus raciocínios, no decorrer da exploração de uma tarefa, em que se interligavam conteúdos aritméticos e algébricos de forma a atribuir significado às representações.

INTRODUÇÃO

A Álgebra escolar é um dos ramos da educação matemática onde tem sido difícil a afirmação de metodologias adequadas às características de cada aluno e, por vezes, considera-se que a compreensão dos conceitos algébricos é reservada apenas a alguns (Kaput, 1999, 2008; Stacey, Chick & Kendal, 2004).

No entanto, as orientações curriculares indicam que a Álgebra escolar deve ser pensada desde os primeiros anos de escolaridade e fortemente ligada aos conceitos aritméticos (NCTM, 2007; ME, 2007, 2013). Referem que todos os alunos devem desenvolver o pensamento algébrico, ao longo do percurso escolar, porque os torna poderosos a resolver problemas, expande as suas oportunidades e fornece-lhes um conjunto de ideias matemáticas fundamentais (NCTM, 2007).

De acordo com Blanton e Kaput (2005), o pensamento algébrico é um processo através do qual os alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

Subjacente a esta definição de pensamento algébrico, surgem duas ideias distintas, que contrastam com a imagem tradicional da álgebra escolar baseada na manipulação formal. Um primeiro aspecto relaciona-se com o facto de existirem outras formas para além da simbólica dos alunos poderem se exprimir algebricamente, tais como a linguagem natural, os diagramas, as tabelas, as expressões numéricas e os gráficos (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007). O segundo tem a ver com a ênfase na compreensão e a produção de significados para os símbolos, em que o pensamento algébrico surge associado à generalização de ideias gerais resultantes de um raciocínio com compreensão.

Sendo assim, pensar algebricamente implica ter acesso a diversas representações, incluindo a simbólica, ser capaz de transitar com flexibilidade entre representações de acordo com as características da tarefa e de operar com os símbolos e com as regras formais, com compreensão (Schoenfeld, 2008). Deste modo, as representações desempenham um aspecto crucial no desenvolvimento do pensamento algébrico e a forma como os alunos representam as ideias matemáticas está intimamente ligada com a maneira como as compreendem e utilizam (Ponte & Serrazina, 2000).

Para além das simbologias algébrica e aritmética, existem mais três sistemas simbólicos fundamentais: a linguagem natural, as tabelas e os gráficos (Carraher & Schliemann, 2007). A estes, Friedland e Tabach (2001) acrescentam ainda a representação verbal e a numérica e apresentam as vantagens e desvantagens de alguns destes sistemas. (Tabela 1)

Por sua vez, Brown e Mehilos (2010) referem que a representação tabular permite estabelecer conexões entre a aritmética (problemas com números específicos), e a Álgebra (quantidades a variar e abstractas). Salientam que as tabelas favorecem a verificação de que as variáveis são números que se alteram e que o valor das expressões varia como o resultado.

Dada a importância atribuída às representações que os alunos utilizam para representar as suas ideias, torna-se relevante analisar a forma como os alunos expressam as suas generalizações quando resolvem tarefas de natureza algébrica.

Sistema	Vantagem	Desvantagem
Representação verbal	— Conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento e do quotidiano	— Por vezes, utilização ambígua e associações incorrectas
Representação numérica	— Compreensão inicial do problema e investigação de casos particulares	— Não é generalizável, em determinados casos
Representação gráfica	— Proporciona uma imagem clara, intuitiva e apelativa de uma função	— Influenciada por factores externos (escalas) — Apresenta uma parte do problema
Representação algébrica	— Concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos — Permite justificar e efetuar generalizações	— Oculta o significado matemático ou a natureza do objecto — Dificulta a interpretação de resultados

Tabela 1

Saliente-se que, em relação à Matemática, no decorrer do 3.º ciclo, os alunos da turma em que foi realizada a tarefa tiveram um percurso de aprendizagem conturbado fruto da multiplicidade de professores que lecionaram a disciplina no 7.º ano. Na avaliação diagnóstica que realizei, no início do ano lectivo, percebi que estes alunos manifestavam lacunas na compreensão dos conceitos algébricos. Face a este panorama, no decorrer do ano escolar, tive a preocupação de valorizar as conexões que se podem estabelecer entre a Álgebra e os restantes temas matemáticos, de forma a promover o desenvolvimento do pensamento algébrico.

A CONCRETIZAÇÃO DA TAREFA

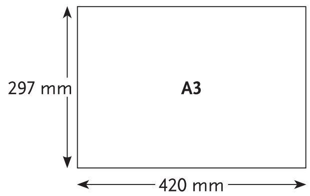
A tarefa utilizada resultou da adaptação de uma proposta existente no projeto 1001 itens do Gave[1] e faz parte de um conjunto lato de propostas de natureza algébrica, que se inserem no âmbito da realização de um percurso de aprendizagem em que se valoriza o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Durante a planificação da aula em que se explorou esta tarefa, refleti sobre os objetivos a atingir, a gestão espacial e temporal, as possíveis questões e dificuldades que os alunos poderiam manifestar, as extensões que se poderiam realizar ao enunciado da tarefa e as estratégias que deveria utilizar para facilitar a discussão final dos resultados obtidos. Assim, optei por fotografar com uma máquina fotográfica digital as produções que os diversos grupos realizavam para que, na fase da discussão dos resultados obtidos, os alunos explicassem o trabalho realizado, tendo por base as suas representações.

Tal como planifiquei, a aula em que foi explorada a tarefa dividiu-se em quatro partes: análise do enunciado da tarefa (5 min.), exploração da tarefa (35 min.), apresentação e discussão do trabalho produzido pelos grupos (40 min.) e o surgimento de algumas extensões da tarefa (10 min.).

TAREFA:

Uma folha A3, com 0,01 mm de espessura, foi cortada ao meio. As duas metades resultantes do corte foram empilhadas e cortadas ao meio.



As quatro partes resultantes do segundo corte voltaram a ser empilhadas e, uma vez mais, foram cortadas a meio. O processo foi repetido sucessivamente.

1. Qual é a altura da pilha antes do 11º corte? Apresenta os cálculos que efetuares.
2. Que dimensões poderiam ter as folhas resultantes de uma sequência de cinco cortes sucessivos da mesma folha A3? Justifica a tua resposta.
3. Imagina que o processo se repetia infinitamente. Obtém uma expressão que indique a altura da pilha de partes da folha e uma outra que indique as dimensões das folhas resultantes desses cortes. Explica o teu raciocínio.

No decorrer deste processo, os alunos encontravam-se divididos em 3 grupos de 4 elementos (Grupo 1, Grupo2 e Grupo 3).

No início da aula, ao lerem o enunciado da tarefa, os alunos sentiram a necessidade de dobrar várias folhas para perceberem que estratégias deveriam utilizar para resolver a situação proposta. Depois, questionaram-se sobre a forma como deveriam organizar os dados e que representações deveriam utilizar, bem como o significado a atribuir à letra *n*.

Nesta fase dos trabalhos, percebi que o grupo 1 não compreendia de que forma utilizaria a letra para generalizar os

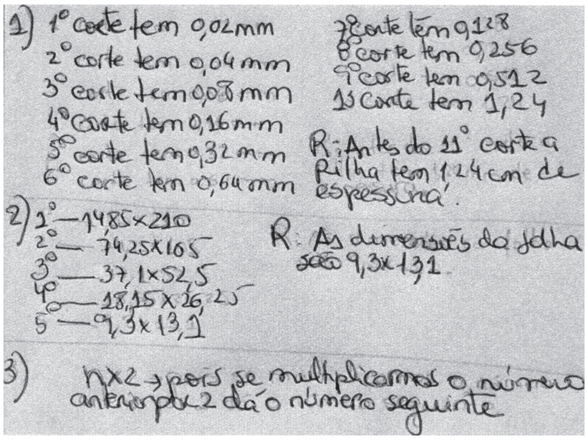


Figura 1. Produção do grupo 1

seus raciocínios e que os grupos manifestavam dificuldade em explicar os seus raciocínios. Perante estes factos, interagi com os grupos e solicitei-lhes que registassem e explicitassem todos os seus raciocínios, utilizando esquemas, palavras, tabelas ou gráficos. (Figura 1)

Da análise dos registos efetuados pelo primeiro grupo, constato que estes alunos organizaram as suas ideias através de uma representação tabelar (embora não desenhem a tabela) e encaram de uma forma recursiva a sequência resultante das dobragens das folhas. Quanto à generalização dos seus raciocínios verifico que consideraram que a letra n representava o número de dobragens e obtêm uma expressão resultante das infinitas dobragens e cortes das folhas. Também observei que este grupo produz respostas diretas e não explica os seus raciocínios. (Figura 2)

O segundo grupo já desenha uma tabela para representar a relação entre o número de cortes e a altura da pilha de folhas. Privilegia a linguagem natural para explicar a generalização obtida para as dimensões das folhas resultantes dos infinitos cortes e consegue formalizar simbolicamente a expressão da pilha de partes da folha. Para este grupo, a letra *n* representa o número de cortes efetuados nas folhas. (Figura 3)

O grupo 3 utiliza uma representação tabelar (embora não desenhe a tabela) para expressar a relação entre o número de cortes e a espessura da pilha de folhas resultante e, numa primeira fase, efetua apenas cálculos aritméticos. No entanto, estes alunos já conseguem formalizar simbolicamente as expressões gerais solicitadas, mas referem que o primeiro valor a atribuir à letra *n* é zero.

Dado o trabalho realizado pelos grupos, optei por encadear a sequência de apresentações de acordo com o nível de generalização: grupo 1-grupo 2-grupo 3.

Durante a discussão dos resultados obtidos, o grupo turma sentiu a necessidade de discutir a noção de variável

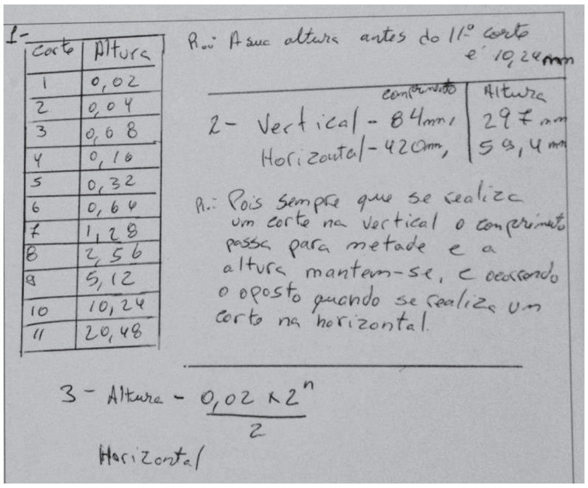


Figura 2. Produção do grupo 2

e o que representava na situação proposta a letra *n*. Foi notório que o grupo 1 manifestou dificuldade em perceber o significado da letra. Por sua vez, o grupo 2 revelou alguma dificuldade em formalizar simbolicamente alguns raciocínios e em perceber de que forma se obtém uma expressão geral. Já o grupo 3 referiu que não sentiu a necessidade de desenhar uma tabela para representar os seus cálculos porque estava a apresentar resultados numéricos. Segundo este grupo, a utilização das tabelas é restrita à representação de funções, quando são fornecidas as expressões analíticas.

De seguida, face às generalizações formais obtidas pelos grupos, promovi um momento de discussão dedicado à demonstração da validade das generalizações obtidas.

Na fase seguinte da discussão, o grupo-turma manifestou a necessidade de analisar o que aconteceria se dobrassem folhas de outros formatos. Sendo assim, os alunos analisaram a seguinte tabela retirada da internet[2]. Perante estes dados, os alunos sentiram curiosidade em estabelecer uma relação entre os diversos formatos e verificaram que a razão entre as diversas dimensões é $\sqrt{2}$. (Figura 4)

No decorrer destas conclusões, percebi que seria interessante para os alunos visionarem um dos episódios da série «Isto é Matemática»[3] que divulga as ideias referidas pelos alunos.

CONSIDERAÇÕES

Da aula anteriormente descrita, constato que alunos que estão a completar o 3.º ciclo, ainda, restringem a explicitação dos seus raciocínios aos cálculos numéricos e, por vezes, não valorizam a construção explícita de tabelas para representar os seus raciocínios. Saliento que apenas um dos três grupos desenhou uma tabela para representar a relação entre o número de cortes e espessura das folhas.

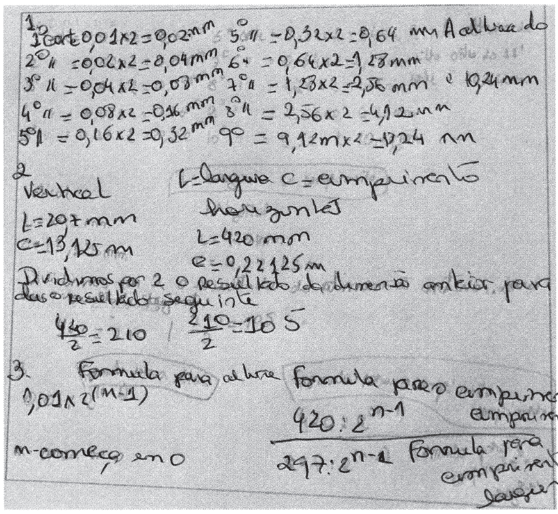


Figura 3. Produção do grupo 3

Formato	Largura (mm)	Altura (mm)
A0	841	1189
A1	594	841
A2	420	594
A3	297	420
A4	210	297
A5	148	210
A6	105	148

Figura 4. Dimensões de folhas de diversos formatos

Quanto à utilização da simbologia algébrica, a maioria dos grupos consegue obter a formalização simbólica dos seus raciocínios, embora não valorize a demonstração da validade das expressões obtidas. Um dos grupos ainda encara a relação entre as variáveis de uma forma recursiva.

As atuais orientações curriculares nacionais (ME, 2003) são parcas na evocação de orientações metodológicas e na forma de trabalhar na sala de aula. No entanto, ainda, é necessário que o professor na sua prática educativa valorize o raciocínio dos alunos e selecione tarefas que promovam uma dinâmica de sala de aula que contribua para o desenvolvimento do pensamento algébrico (Canavarro, 2007), pois a Álgebra é uma poderosa ferramenta matemática, mas também é uma das áreas em que os alunos mostram mais dificuldades de aprendizagem (Radford, 2009).

Notas

[1] http://www.gave.minedu.pt/np3content/?newsId=111&fileName=folha_de_papel_a3.pdf

[2] http://design.blog.br/design-grafico/tamanhos-de-papel

[3] http://www.youtube.com/watch?v=Wd5NjLWSJ0o

Referências

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412–446.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *15*(9), 532–538.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, *16*(2), 81–118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promothing multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133–155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp.5–17). New York, NY: Routledge.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K.Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–762).Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Schoenfeld, A. H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. J. Kaput, D. W.Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479–510). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.). (2004). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Laura Bandarra Pinto

Agrupamento de Escolas de Moura