A atividade de resolução de problemas matemáticos em sala de aula

EDUARDA MOURA

Resumo. *Neste artigo é discutido o tema curricular da resolução de problemas matemáticos no 2.° ciclo em sala de aula do ponto de vista da aprendizagem em interação. Com base em propostas e recomendações inspiradas em observações e discussões feitas durante sessões de formação de professores, algumas situações são exemplificadas e discutidas ilustrando a complexidade que o professor encontra quando tem como objetivo fazer sentido da resolução de problemas como atividade de sala de aula.*

No Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 2.° Ciclo (ME, 2005) as sessões de formação foram estruturadas para que os professores tivessem a oportunidade de: a) fazer uma análise curricular de problemas matemáticos; b) resolver os problemas e pensar nos problemas em termos dos processos que eles próprios utilizaram para os resolver; e, c) aprender a ouvir as estratégias das crianças integrando essas estratégias na monitorização da atividade de resolução de problemas. Neste artigo discutimos alguns exemplos dos problemas didáticos que o professor pode encontrar quando faz sentido da resolução de problemas como atividade de sala de aula.

A resolução de problemas matemáticos: recomendações da investigação

Aprendizagem. Os aspetos mais estudados da resolução de problemas matemáticos são o desenvolvimento de estratégias para resolver problemas, o autocontrole e a satisfação intelectual resultante da atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da metacognição. Os processos associados à resolução de problemas requerem uma prática de reflexão e automonitorização que leve ao desenvolvimento de heurísticas, procedimentos matemáticos, ter consciência de processos cognitivos e autocontrole.

Todos estes resultados de investigação levam a levantar a hipótese de que os processos da aprendizagem da resolução de problemas concorrem com a compreensão dos conceitos matemáticos que está subjacente aos problemas o que torna o processo da aprendizagem mais complexo. Assim, é um desafio para o professor desenvolver esta atividade em sala de aula.

Aprender a resolver problemas foi também estudado em relação a estilos cognitivos e diferenças individuais bem como conceções erróneas sobre a matemática que podem impedir a criança de resolver problemas. Têm ainda sido documentadas as conceções restritas que as crianças têm sobre o que constitui um problema matemático revelando, por exemplo, conceções simplistas. Detalhes sobre todos estes aspetos da aprendizagem da resolução de problemas podem ser consultados em Schoenfeld (1992) e Silver (1985).

Documentados foram também os aspetos afetivos da resolução de problemas relativamente a experiências emocionais que contribuem para a formação e reforço de sentimentos que podem não ajudar a criança a resolver problemas (McLeod, 1992). Como dar a conhecer aos alunos as limitações das suas escolhas em resultado dos seus estados afetivos — negativos ou positivos — pode constituir uma forma de ação para o desenvolvimento da atividade de resolução de problemas, podendo a atividade ser autónoma e não dependente do desempenho dos professores ou outros alunos.

O ensino. O matemático George Polya foi durante algum tempo o maior precursor do ensino da resolução de problemas preocupando-se também em pensar sobre como poderia ensinar os alunos a resolver problemas (Polya, 1985). Investigação sobre o ensino da resolução de problemas tem identificado vários fatores que não facilitam o seu ensino. As crenças e conceções dos professores sobre a matemática e seu ensino e aprendizagem são incompatíveis com a atividade que o professor tem de desenvolver para que os seus alunos aprendam a resolver problemas. Mesmo quando os professores aderem à resolução de problemas em sala de aula, investigação tem mostrado que os professores passam a maioria do tempo a modelar estratégias e a resolver problemas de aplicação direta. Por outro lado, não passam tempo suficiente em atividades de exploração dos problemas, na discussão sobre a seleção de uma dada estratégia, e em atividades que tornem parte integrante da resolução de problemas pensar sobre a resolução do problema, o seu processo, as estratégias e os métodos usados. Em síntese o tempo dedicado a planear que cada aluno tenha oportunidade de fazer sentido da sua experiência é insuficiente.

Os futuros professores apresentam também dificuldades em ver como podem ensinar a resolver problemas aos seus alunos dado que eles próprios sentem dificuldades em resolver problemas acabando muitas vezes por considerar que, por essa razão, a atividade não é apropriada aos seus alunos. Detalhes sobre o ensino da resolução de problemas podem ser consultados em Fernandes, *et al.*, (1997); Silver (1985); e, Thompson (1992).

Modelação matemática é a tentativa de trazer para a sala de aula situações que envolvem a separação do que é matemático numa dada situação e do que é acessório ou ruído (Matos, *et al.*, 1995). A atividade de modelação matemática permite o estudo de propriedades matemáticas de certos modelos e a escolha e justificação de modelos na interpretação matemática de uma situação concreta. Este tipo de atividade é logo facilmente adaptável à resolução de problemas dado a interpretação matemática de uma situação concreta ser facilmente problemática.

Nos relatórios sobre investigação da resolução de problemas nos últimos cinco anos, Lesh & Doerr (2003), apontam para o reforço destas recomendações e encorajam os professores a trabalhar situações que envolvem vários ciclos de modelação, talvez na tentativa de diversificar, bem como desdobrar, o processo da aprendizagem da resolução de problemas na sala de aula.

O ambiente. O ambiente de sala de aula envolve interações de dois tipos: as interações entre as crianças e o ambiente e, as interações que ocorrem em cada uma das crianças. As interações com o ambiente podem englobar manipulação de objetos, experiências com objetos, interações com os mais diversos artefactos de entre os quais o computador ocupa um lugar primordial e as interações com os outros, com outras crianças e com o professor. Nenhuma interação pode ser planeada na sua totalidade, e as interações de entre cada uma das crianças são resultado de autorregulação (Steffe, 1999). Em consequência, o ambiente que é proporcionado nas aulas de resolução de problemas deve ser propício a que as crianças exteriorizem o que estão a pensar e que o façam também através das suas ações com os artefactos e através das interações com as outras crianças e com o professor.

Segundo Cobb & Bauersfeld (1995) aprender a interagir em pequenos grupos pode ser conseguido através do desenvolvimento de normas sociais que permitem às crianças aprender a ouvir e a fazer sentido matemático do que os outros fazem ou dizem conceptualizando a interação com os outros como uma obrigação. Ainda no contexto da experiência de ensino de sala de aula, tanto em pequenos grupos como em grande grupo, padrões de interação e padrões de argumentação desenvolvem-se de maneiras diferentes e propícias à aprendizagem ativa da matemática e logo podendo ter interesse para um ambiente de sala de aula propício à aprendizagem da resolução de problemas. Nestes ambientes o professor faz sentido da atividade das crianças valorizando as suas produções matemáticas (Wood, Nelson & Warfield, 2001).

Investigação sobre as aprendizagens matemáticas necessárias para que uma criança esteja pronta para enfrentar e participar ativamente em discussões, em grupo, na sala de aula de matemática é ainda não exaustiva. Steinbring (2000) tem estudado como o professor, os alunos e a matemática interagem analisando as interações matemáticas na sala de aula através de um modelo semiótico adaptado à matemática: o triângulo epistemológico. Com estes conceitos e a nível do ensino elementar de problemas aritméticos curriculares, consegue encontrar relações feitas entre os contextos de referência embutidos na didática e na interação da sala de aula e os símbolos matemáticos, neste caso os números inteiros (Steinbring, 2006). Como estes tipos de relações simbólicas podem contribuir para o desenvolvimento de ambientes de sala de aula propícios à aprendizagem da resolução de problemas, poderá talvez ser realizado através de ambientes de aprendizagem em que os professores conseguem ensinar refletindo sobre a atividade simbólica das crianças quando em interação com outras crianças. E trabalhando com os alunos essas relações simbólicas e as operações subjacentes à atividade de simbolização. A construção de relações entre símbolos e referentes requer aprendizagem e estudos que incidam na aprendizagem desta linguagem, envolvida também na resolução de problemas matemáticos, têm revelado que nem sempre estas relações se realizam. Ver por exemplo Lehrer *et al.* (2000), um estudo no qual é recomendado que o desenvolvimento com os alunos da atividade de atribuir símbolos, desenhar diagramas e descrever situações com objetos e conceitos matemáticos deve ser feita de modo a serem os alunos a engendrar tal atividade, opostamente a que as formulações dadas aos problemas, por exemplo, estejam repletas de legendas a decifrar.

Moura (2004) chama a atenção para o papel da construção do conhecimento matemático quando as crianças interagem com outras crianças, defendendo que, em interação, significados matemáticos têm de ser segurados em imaginação e tal não acontece necessariamente em todas as fases da aprendizagem de um conceito. Aprender a interagir de forma a não perder ou ceder significados matemáticos não é garantido, depende da aprendizagem e também da experiência com os conceitos em interação. No desenvolvimento dessa experiência as crianças podem precisar do apoio do professor havendo aqui uma razão adicional para aprender a fazer sentido da forma como as crianças aprendem e como se desenvolve a progressão dessa aprendizagem em interação. Muito está ainda por investigar sobre o desenvolvimento deste tipo de ensino.

Em relação a fatores socioculturais Lerman (2006) exclui os estudos sobre como as crianças podem construir uma epistemologia da matemática própria dentro da escola. Apesar de considerarmos a investigação sociocultural sobre a sala de aula de matemática crucial, dado o detalhe que nos oferece sobre a educação dos alunos numa instituição que historicamente foi desenhada para satisfazer as necessidades da sociedade, não encontramos resultados de investigação que nos informem sobre os aspetos discutidos neste artigo. A discussão aqui feita não exclui portanto que futuras investigações se foquem nos aspetos macrosociais do ambiente de sala de aula propício à aprendizagem da resolução de problemas.

O senhor Anastácio quer colocar uma cerca à volta de cada um dos quatro canteiros indicados na figura. Sabendo que o perímetro do canteiro A é de 60 m, o do B é de 64 m e o do C é de 56 m, de quantos metros de cerca precisará o senhor Anastácio para o canteiro D?

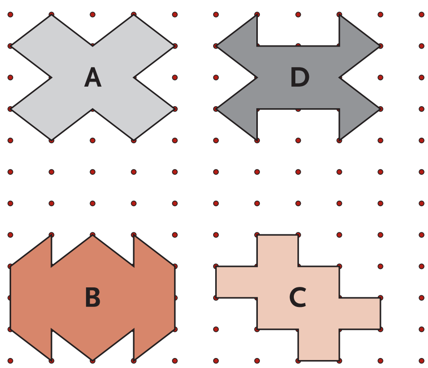

Figura 1. A cerca do Sr. Anastácio

Aprender a resolver problemas matemáticos em sala de aula

As estratégias das crianças. Para qualquer um de nós um problema matemático forma-se quando nos deparamos com qualquer questão ou assunto que envolva dúvida e incerteza. A palavra *problema* vem do grego *pro'blema* e o seu significado enciclopédico é o de obstáculo. Na etimologia da palavra está expresso que a ideia de problema é a de ser capaz de construir perante si um obstáculo a partir de uma situação proposta. Em matemática um problema é também sinónimo de *puzzle*, adivinha ou enigma, é antónimo de certeza e resolver problemas é aprender a lidar com incerteza. Na aprendizagem da resolução de problemas matemáticos por parte das crianças queremos que aprendam a lidar com incerteza, que aprendam a divertir-se com isso e que aprendam matemática nova.

Os problemas trabalhados com os professores foram retirados de diversas fontes. A discussão do problema da Cerca do Sr. Anastácio (Gave, 2001), ver Figura 1, parece-nos relevante no sentido de ilustrar a complexidade de um ambiente de sala de aula de resolução de problemas.

A noção de substituição algébrica está implícita no problema, basta pensarmos sobre o que é necessário saber sobre a linha do perímetro da cerca D e analisarmos de que forma vamos chegar ao valor do comprimento de cada uma das três dimensões a descobrir. São necessárias duas substituições e o problema pode tornar-se mais simples se o transformarmos num problema semelhante em que só uma substituição é necessária, embora muito menos interessante do ponto de vista matemático e da aprendizagem da matemática. As estratégias seguintes poderão aparecer:

- Contar o número de segmentos em que o perímetro se decompõe sem os diferenciar e dividir o perímetro da cerca por esse número;
- Depois de encontrar o lado do retângulo na cerca A, fazer o mesmo na cerca B sem levar em conta que os segmentos do lado e diagonal não são geometricamente iguais;
- Depois de encontrar o lado do retângulo na cerca A, descontá-lo sucessivamente ao perímetro da cerca B — 64, 59, 54, 49, 44, 39, 34, 29 e 24 — e por tentativa erro encontrar o número que cabe oito vezes em 24, ou seja, o número que multiplicado por 8 dá 24, ou somar oito vezes um número até o resultado ser 24.

À primeira vista parece adequado orientar as crianças para a cerca A, sugerindo «tirar o primeiro valor» dividindo 60 por 12. No entanto, orientá-los para a cerca D, e encorajá-los a investigar o que é necessário descobrir para calcular a medida do perímetro envolve pensar ativamente no problema; por isso pensamos ser mais adequado não tomar a decisão de induzir a criança num caminho determinado subtraindo-a da aprendizagem de investigar sobre o problema e do prazer da descoberta. Mais ainda, apesar das crianças demorarem mais tempo, caiem menos no erro de contar o número de segmentos nas outras cercas, sem os diferenciar, e fazer uma divisão do perímetro por esse número.

Nos casos em que as crianças não diferenciam os diferentes segmentos de que o perímetro é composto — duas primeiras estratégias — ao questionarmos sobre o que necessitam saber sobre a cerca D, podemos sugerir à partida que façam experiências para pensar sobre as relações entre as medidas dos diferentes segmentos que compõem a linha do perímetro. É mais provável que assim descubram que antes de repetirem a estratégia da divisão em relação à cerca B, têm de descontar na medida total do perímetro a medida das diagonais. Esta estratégia de descontar o valor poderá ter de ser ensinada ou poderá surgir como necessidade lógica, após descobrirem que os segmentos são diferentes. Pedir às crianças para todas as vezes que descobrem a medida de um segmento a escrevam junto de todos os segmentos iguais, em todas as cercas, ajuda as crianças a não esquecer o que estão a fazer e dá-lhes ânimo porque estão a progredir.

Para algumas crianças a diagonal de um quadrado e o lado medem o mesmo. Ao estudar a geometria do quadrado e do retângulo, se as crianças passarem por comparar diretamente a diagonal do retângulo com o lado, com uma dobragem por exemplo, talvez os diferenciem nas representações. Estas propriedades geométricas quando são simplesmente apresentadas às crianças são esquecidas pois não estão relacionadas com a sua experiência matemática.

Para as crianças familiarizadas com a resolução de problemas é garantido fazer listas, desenhos, esquemas e cálculos sem os apagar, não tendo como objetivo único apresentar uma solução fechada e concisa. Constatamos ser necessário trabalhar com as crianças para as encorajar a criar hábitos de fazer experiências, a interpretar os resultados e a fazer verificações autonomamente. As crianças que não se familiarizam com este tipo de atividade não se mostram ativas sendo necessário encorajá-las a escrever o que estão a pensar e a pensar alto para assim progredirem nas suas formas de pensar.

Monitorizar a atividade da resolução de problemas. Como já referido, a monitorização da atividade de resolução de problemas deve ser feita sempre no contexto da aprendizagem da matemática e de forma a expandir essa aprendizagem.

Durante a formação as crianças estiveram organizadas em pequenos grupos. Verifica-se em alguns casos que as crianças preferem ouvir as explicações dos colegas sem participarem na resolução do problema. Participar na resolução tem de ser conceptualizado pela criança como uma obrigação, embora o professor tenha de garantir que a criança esteja motivada para o fazer, começando por trabalhar com as crianças para que gostem de resolver problemas. Uma outra razão para que as crianças se envolvam em encontrar as suas próprias soluções dos problemas opostamente a ouvirem uma solução, explicada quer pelo professor quer por um colega, é que ouvir a resolução de um problema pode levar facilmente à sua compreensão. No entanto, é totalmente perdida a oportunidade que a criança tem de desenvolver as estratégias necessárias para resolver aquele e subsequentes problemas.

Que uma criança entenda o que as outras crianças estão a fazer ou dizer, ou até saiba inquirir os colegas, sem nunca contribuir para a resolução do problema não é suficiente para considerar que a criança está a participar. Quando o professor notar este padrão tem de intervir de forma a que todas as crianças tenham oportunidade da discussão ser feita à volta da forma como pensaram no problema. A monitorização das interações em pequeno grupo deverá assim incluir este aspeto porque algumas crianças podem saber entender e inquirir os colegas, mas não fazer ouvir as suas próprias ideias, sabendo segurar os seus próprios significados matemáticos em interação.

Comentário final

Com o objetivo de tornar as fases de resolução de problemas de Polya em instrumentos pedagógicos que ajudem o professor, a monitorizar a atividade das crianças durante a resolução de problemas, defendemos que o professor estando consciente do papel das fases na resolução de problemas as possa contextualizar na atividade das crianças.

A monitorização das interações nos pequenos grupos em situação de resolução de problemas em sala de aula é um espaço profissional que todo o professor precisa de conquistar. Muito detalhe sobre este tipo de monitorização está ainda por investigar bem como sobre a formação necessária para que os professores não só acreditem que os alunos aprendem a resolver problemas matemáticos, como são capazes de realizar tal ensino.

Como foi acima mencionado, os padrões de interação propícios à aprendizagem da resolução de problemas em sala de aula dependem de vários aspetos da aprendizagem em interação ainda não investigados, tanto em pequenos grupos como em grande grupo, e da aprendizagem da monitorização da atividade das crianças que pode resultar em tais padrões. Esperamos que os exemplos discutidos possam ajudar futuras investigações sobre estas duas dimensões da aprendizagem da resolução de problemas em sala de aula.

Referências

Cobb, P., & Bauersfeld, H. (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures.* (Vol. 2). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Fernandes, D., Lester, F., Jr., Borralho, A., & Vale, I. (1997). *Resolução de problemas na formação inicial de professores de matemática: múltiplos contextos e perspetivas.* Lisboa: Gráfis.

Gave. (2001). *Provas de Aferição.* Ministério da Educação — Gabinete de Avaliação Educacional. Fonte: http://www.gave.min-edu.pt/np3/7.htm [2007, Janeiro].

Lehrer, R., Schauble, L., Carpenter, S., & Penner, D. (2000). The interrelated development of inscriptions and conceptual understanding. Em P. Cobb, E. Yackel, & K. MacClain (Eds.), *Symbolizing and communication in the mathematics classrooms: perspectives on discourse tools, and instructional design* (pp. 325–360). London: LEA.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in the PME. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 347–366). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. Em R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* (pp. 3–34). Mahwah, USA: LEA.

Matos, J. F., Carreira, S. P., Santos, M. P., & Amorim, I. (1995). A modelação no ensino da Matemática. In J. F. Matos, S. P. Carreira, M. P. Santos, & I. Amorim (Eds.), *Modelação Matemática* (pp. 149–181). Lisboa: Universidade Aberta.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan.

ME, & MCTES. (2005). Despacho conjunto n.° 812/2005. *Diário da República* [2014, Janeiro].

Moura, E. (2004). *Social interaction in the context of a radical constructivist teaching experiment*, University of Georgia, Athens.

Polya, G. (1985). *Como resolver problemas.* (2.ª ed.). Lisboa: Gradiva.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives.* Hillsdale: LEA.

Steffe, L. P. (1999). Individual constructive activity: An experimental analysis. *Cybernetics & Human Knowing*, 6(1), (pp. 17–31).

Steinbring, H. (2000). *Chapter 5: Analyses of mathematical interaction in teaching processes.* Mathe2000. Fonte: www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/rf46steinbring.pdf [2013, Outubro].

Steinbring, H. (2006). *What makes a sign a mathematical sign? — an epistemological perspective on mathematical interaction* (Springer). Educational Studies in Mathematics. Fonte: www.edumatec.mat.ufrgs.br/artigos/esm_2008_v68/6semiotic.pdf [2013, Outubro].

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp.127–146). New York: Macmillan.

Wood, T., Nelson, B. S., & Warfield, J. (Eds.). (2001). *Beyond classical pedagogy.* (Vol. 16). Mahwah: LEA.

Eduarda Moura